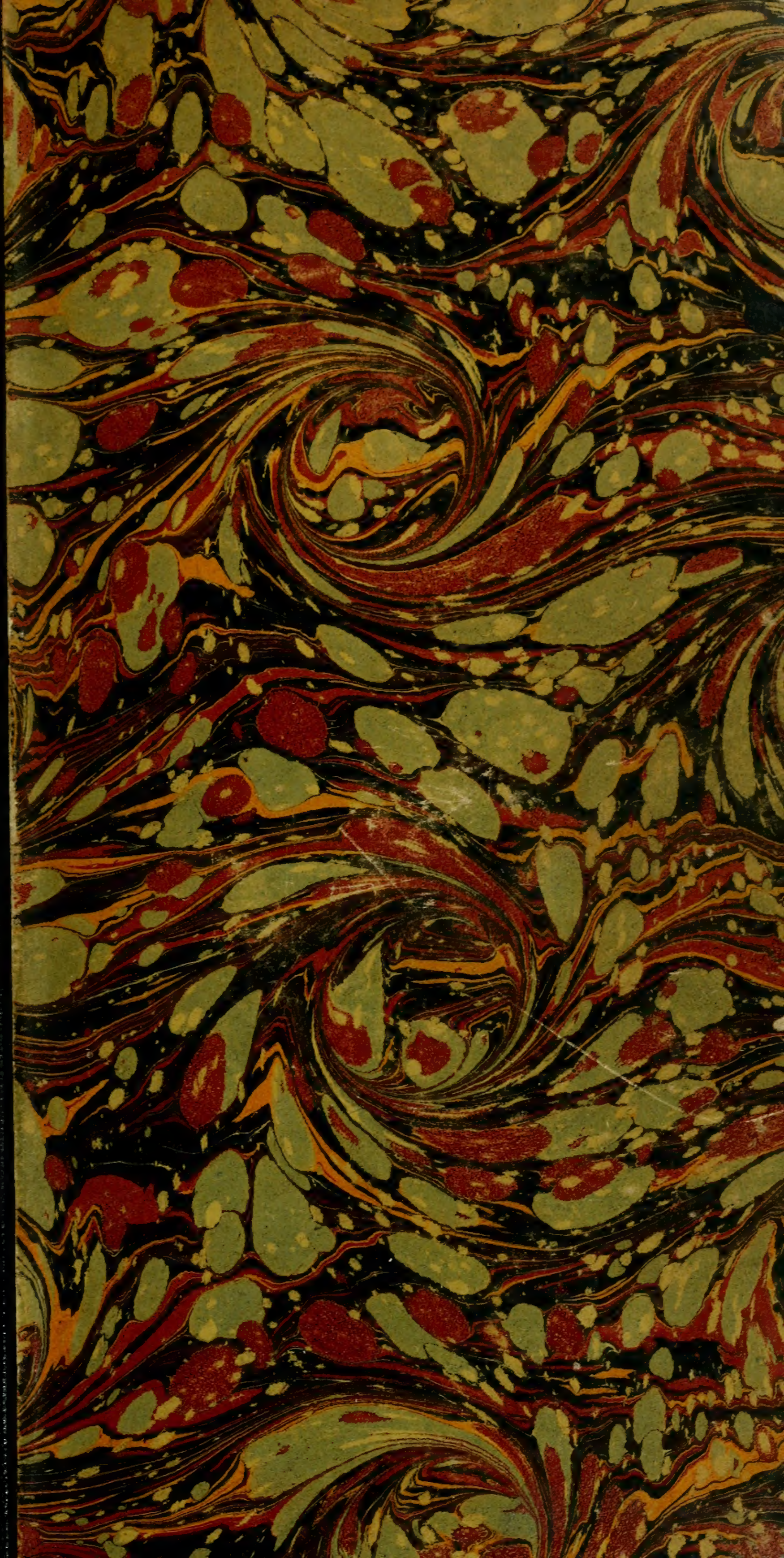
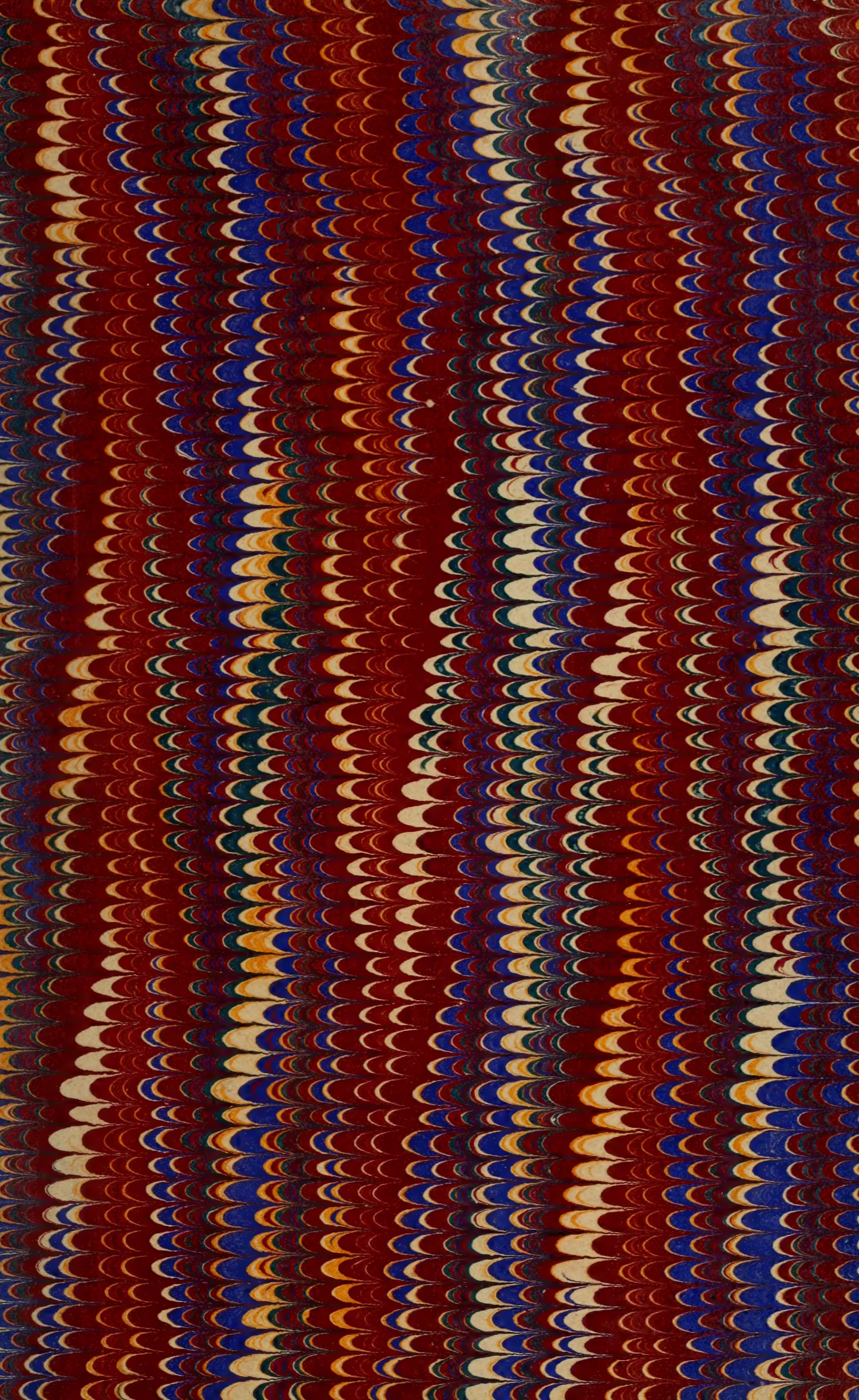




LEÇONS

SUR LA

THÉORIE DES FONCTIONS.

25376 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,
Quai des Grands-Augustins, 55.

LEÇONS

SUR LA

THÉORIE DES FONCTIONS

PAR

ÉMILE BOREL,

MAITRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS ET DU BUREAU DES LONGITUDES,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1898

A

MONSIEUR JULES TANNERY,

SOUS-DIRECTEUR DES ÉTUDES SCIENTIFIQUES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

Hommage de respectueuse affection.

PRÉFACE.

Le titre que j'ai cru devoir adopter est assez vague pour qu'il ne me semble pas inutile de donner quelques explications sur l'objet de ces *Leçons* (¹). Les dimensions de ce petit livre me dispensent, je l'espère, de dire que ce n'est point un Traité complet sur une branche des Mathématiques dont l'étendue s'accroît chaque jour. Ce n'est pas non plus un exposé nouveau des principes de la théorie : ces principes, rendus classiques en France par la publication du célèbre Cours autographié de M. Hermite, ont été exposés depuis dans plusieurs Ouvrages (²), qu'il n'y a pas lieu de remplacer.

Mais la lecture des Mémoires originaux devient chaque jour plus difficile pour celui qui connaît seulement de la Théorie des fonctions les parties regardées actuellement comme classiques ; il m'a dès lors semblé qu'on pouvait chercher à faire œuvre utile en tentant d'exposer, d'une manière élémentaire, certaines recherches qui, bien que

(¹) A quelques modifications près, ces leçons sont la reproduction de conférences faites à l'École Normale au printemps de 1897.

(²) En se bornant aux livres écrits en français, on peut citer le *Cours d'Analyse* de M. Jordan, le *Traité d'Analyse* de M. Picard, le *Traité des fonctions elliptiques* de MM. Tannery et Molk, et aussi l'excellent *Cours d'Analyse de l'Université de Lille*, par M. Demartres. Ces divers Ouvrages ne sont pas d'ailleurs exclusivement consacrés à la Théorie des fonctions. On doit signaler à part le *Cours d'Analyse* de M. Méray, où le savant professeur de Dijon expose cette théorie d'une manière systématique à un point de vue qui lui est personnel. Ce point de vue a de nombreuses analogies avec celui de Weierstrass, mais M. Méray a édifié sa théorie à une époque où Weierstrass n'avait pas encore publié ses plus importants résultats, et s'était contenté de les faire connaître dans son enseignement.

relativement récentes, prennent chaque jour une importance plus considérable. De ce nombre est la théorie des ensembles : c'est à elle qu'est consacré cet Ouvrage. J'ai tenu cependant à lui donner le titre de *Leçons sur la Théorie des fonctions*, car, en parlant des ensembles, j'ai cherché à ne jamais perdre de vue les applications.

Ce n'est pas que je méconnaisse le très haut intérêt que présente par elle-même la théorie des ensembles; mais il m'a paru qu'il y avait lieu de distinguer nettement cet intérêt philosophique de l'utilité pratique de la théorie, c'est-à-dire de son lien avec d'autres parties des Mathématiques. Aussi ai-je laissé de côté bien des résultats intéressants obtenus par divers géomètres au sujet des ensembles, parce que je n'aurais pu en donner d'applications ici même.

Les trois premiers Chapitres sont un exposé des éléments de la Théorie des ensembles; j'ai cherché à les rendre aussi accessibles que possible, en supposant chez le lecteur un minimum de connaissances.

Les trois derniers Chapitres contiennent des applications à la Théorie des fonctions : j'ai, cette fois, supposé connus certains résultats qui sont établis dans l'un quelconque des Ouvrages cités il y a un instant et semblent, par suite, pouvoir être regardés comme classiques.

Je n'ai d'ailleurs pas cherché à remplacer la lecture des Mémoires originaux, mais seulement à la faciliter; aussi ai-je laissé des lacunes qu'il aurait été aisé de combler en transcrivant presque textuellement un certain nombre de pages de tel ou tel Mémoire : il y a toujours avantage, pour le lecteur qui désire approfondir une question, à recourir lui-même au Mémoire original.

Des Notes sont consacrées à quelques questions qui se rapportent aux principes de la théorie des ensembles et dont la discussion aurait alourdi inutilement les premiers Chapitres.

INDEX.

LEÇONS

SUR LA

THÉORIE DES FONCTIONS.

CHAPITRE I.

NOTIONS GÉNÉRALES SUR LES ENSEMBLES.

Nous ne chercherons pas à donner une définition du mot « ensemble » : il nous paraît qu'il y a là une notion suffisamment primitive pour qu'une *définition* en soit au moins inutile; on peut seulement se proposer d'éclaircir par des exemples le sens de ce mot, mais ces exemples ne donneraient pas l'*idée* d'ensemble à celui qui ne l'aurait pas. On peut dire que l'on entend par *ensemble* une collection d'un nombre fini ou infini d'objets d'ailleurs quelconques; ce mot *collection* doit donc être pris dans le sens le plus large possible; par exemple, on dira l'*ensemble des nombres rationnels,* l'*ensemble des nombres positifs,* l'*ensemble des fonctions continues d'une variable réelle,* l'*ensemble des points situés sur un cercle donné et dont le sinus est incommensurable,* etc. Nous supposons donc que nous avons l'*idée* d'ensemble; mais cette idée n'a point encore une netteté suffisante pour pouvoir figurer dans un raisonnement mathématique; le but des quelques pages qui vont suivre est précisément de chercher à donner à la notion d'ensemble la précision qui est nécessaire pour qu'on puisse l'utiliser dans des recherches rigoureuses.

La première difficulté qui se présente est la suivante : lorsqu'un ensemble est composé d'une infinité d'éléments, quand doit-on

le considérer comme donné (1)? Il est bien clair, en effet, que, si le nombre des éléments est *fini*, donner un ensemble, c'est donner tous ses éléments, sans en excepter un seul. Peut-on adopter une telle définition lorsque le nombre des éléments est infini : l'expression *donner une infinité d'éléments* doit-elle être regardée comme ayant un sens?

La notion de puissance.

On rencontre cette question pour la première fois dans les éléments, lorsqu'on aborde l'étude des séries (2) et l'on adopte d'habitude la définition suivante : une série infinie, u_1, u_2, ..., u_n, ... est *donnée*, si l'on sait calculer le *terme général* u_n lorsqu'on connaît son rang n. En d'autres termes, u_n est une fonction donnée de n. D'ailleurs, u_n peut être donné explicitement en fonction de n, ou bien être seulement déterminé par

(1) M. G. Cantor, dans un des Mémoires de haute importance qu'il a publiés sur la théorie des ensembles, donne la définition suivante : « Je dis qu'un ensemble d'éléments appartenant à une sphère abstraite quelconque est *bien défini* quand, par suite du principe logique du troisième exclu, on peut le considérer déterminé de telle façon que : 1° un objet quelconque appartenant à cette sphère abstraite étant choisi, l'on puisse regarder comme *intrinsèquement* déterminé s'il appartient ou non au système en question et que, 2° deux objets appartenant à l'ensemble étant donnés, l'on puisse regarder comme *intrinsèquement* déterminé s'ils sont égaux ou non, malgré les différences qui peuvent se présenter dans la manière dont ils sont donnés.

» En fait, on ne pourra pas généralement effectuer d'une manière sûre et précise les déterminations en question *avec les méthodes* ou *les moyens dont on dispose*; mais là n'est pas la question..... Pour éclaircir ceci, je rappelle la définition du système de tous les nombres algébriques; on peut, sans aucun doute, concevoir être déterminé intrinsèquement si un nombre η, choisi à volonté, appartient ou non aux nombres algébriques; néanmoins le problème qui consiste à trouver cette détermination par rapport à un nombre donné η est souvent, comme on le sait, un des plus difficiles. » (*Acta mathematica*, t. II, p. 363). On verra que nous nous plaçons à un point de vue très différent de celui de M. G. Cantor, dont nous avons tenu à citer textuellement ce passage, car il nous a paru très intéressant, mais en même temps assez difficile à comprendre pour que nous ayons craint d'en altérer le sens en cherchant à le résumer ou à l'interpréter.

(2) On la rencontrerait aussi dans la définition des nombres incommensurables, par une fraction décimale ou par tout autre moyen; mais on a alors moins l'habitude de la mettre en évidence; nous reviendrons plus loin sur ce point.

une loi quelconque, par exemple, par une relation de récurrence au moyen des termes précédents. Dans tous les cas, on connaît un moyen de calculer successivement, les uns après les autres, tous les termes de la série, en les obtenant d'ailleurs chacun une seule fois (¹).

Nous sommes ainsi amenés à proposer la définition suivante : *Nous dirons qu'un ensemble est donné lorsque, par un moyen quelconque, on sait en déterminer tous les éléments les uns après les autres, sans en excepter un seul et sans répéter aucun d'eux plusieurs fois.* Cette définition, à laquelle nous avons été naturellement conduits, paraîtra sans doute claire au lecteur non encore familier avec cette théorie; mais l'une des idées que nous serions le plus heureux de faire acquérir à celui qui veut arriver à penser par lui-même sur la théorie des fonctions, c'est que, dans toutes les questions où intervient l'infini, il faut se méfier extrêmement de la prétendue clarté : rien n'est plus dangereux que de se payer de mots en pareille matière. C'est ce que nous allons constater en analysant cette définition, et nous serons ainsi conduits à plusieurs notions importantes.

Que veulent dire, en effet, ces mots : *Déterminer tous les éléments les uns après les autres?* Reprenons l'exemple de la série u_n; donner, les uns après les autres, les éléments de l'ensemble u_n, a ici un sens parfaitement clair; c'est donner d'abord u_1, puis u_2, puis u_3, puis u_4, ... Mais, si nous prenons un autre exemple, et si nous considérons, pour fixer les idées, l'ensemble de tous les points d'une circonférence, que sera-ce que *les donner tous, les uns après les autres?* Dans quel ordre faut-il les prendre pour être assuré de les avoir tous? Sans étudier encore d'une manière approfondie cette embarrassante question, sur laquelle nous reviendrons dans les Notes, nous pourrions être tentés de

(¹) On pourrait aussi imaginer que u_n est une fonction de n que l'on conçoit, sans qu'elle soit explicite; au sujet d'une telle dépendance (entre u_n et n) qui ne correspond à aucune *loi* mathématique, on consultera avec le plus grand fruit un intéressant article de M. Jules Tannery dans la *Revue générale des Sciences* (28 février 1897). La définition donnée par M. G. Cantor dans la note de la page précédente se rattache au même ordre d'idées. Mais nous n'insistons pas sur ce point, car, sans en méconnaître le très haut intérêt, nous devons constater qu'il a, actuellement, peu d'importance au point de vue purement mathématique.

répondre : Pour avoir tous les points d'un cercle, il suffit de le tracer avec un compas : la pointe du compas passera successivement par tous ses points, sans en excepter un seul. Il n'y a pas d'inconvénient à accepter provisoirement cette réponse, mais nous ne pouvons manquer d'être frappés des différences essentielles qu'elle présente avec celle que nous avons pu faire dans le cas de la série des u_n. Pour ne signaler actuellement qu'une de ces différences : dans la série un élément est immédiatement précédé (et suivi) d'un autre élément parfaitement déterminé; il n'en est nullement de même sur le cercle : un point n'a pas de point consécutif.

Qu'est-ce qui facilite notre conception de l'*ensemble* formé par les termes de la série? Il est aisé de se rendre compte que c'est le fait d'avoir pu donner un *indice* à chacun de ces termes, de sorte que chacun d'eux corresponde à un nombre entier positif déterminé n. Dès lors, la conception que nous avons de l'*ensemble* des u_n est aussi claire que notre conception de l'*ensemble des nombres entiers positifs* 1, 2, 3, ..., n, ... Or ce dernier ensemble nous est très familier [1]; nous avons certainement le droit de le regarder comme connu. C'est grâce à cette connaissance que les mots : *l'ensemble des u_n est donné* ont pour nous un sens bien précis.

Si nous cherchons à analyser le procédé par lequel nous nous sommes donné cet ensemble des u_n, voici ce que nous constatons : nous sommes partis d'un ensemble que nous avons considéré comme *donné :* l'ensemble des nombres entiers positifs; puis, à chaque élément n de cet ensemble *donné,* nous avons fait correspondre [2] un élément de l'ensemble qu'il s'agissait de définir et qui s'est trouvé ainsi *donné* d'une manière précise. Nos deux ensembles, l'ensemble des nombres entiers positifs, que nous désignerons par E, et l'ensemble des u_n, que nous désignerons

(1) Ce n'est point ici le lieu d'étudier les raisons pour lesquelles cet ensemble nous apparaît comme bien connu, ni les procédés par lesquels notre esprit a acquis cette connaissance. On trouvera un résumé et une discussion des diverses opinions émises à ce sujet, ainsi que des renseignements bibliographiques, dans l'intéressante thèse de M. Couturat : *De l'Infini mathématique*. *Voir* aussi l'article de M. Jules Tannery, déjà cité.

(2) *Voir* la note de la page 3.

par U, sont donc liés d'une manière très simple. A chaque élément (n) de E correspond un élément (u_n) de U et un seul, et réciproquement à chaque élément (u_n) de U correspond le seul [1] élément (n) de E.

Il résulte d'ailleurs de là qu'à des éléments différents de l'un des ensembles correspondent des éléments différents de l'autre. On peut exprimer cette relation entre E et U en disant qu'il existe entre leurs éléments une correspondance *univoque* et *réciproque;* nous conviendrons de dire, plus brièvement, que les deux ensembles ont même *puissance*. La notion de puissance, introduite par M. G. Cantor, est fondamentale dans la théorie des ensembles; comme nous venons de le voir, *deux ensembles sont dits avoir même puissance lorsqu'on peut établir entre leurs éléments une correspondance telle, qu'à tout élément de chacun d'eux corresponde un élément et un seul de l'autre.*

Il est clair que, si deux ensembles A et B ont chacun même puissance qu'un troisième ensemble C, A a même puissance que B. Au lieu de dire que deux ensembles ont même puissance, on dit aussi que leurs puissances sont égales, de sorte que nous aurions pu exprimer le fait précédent en disant que deux puissances égales à une même troisième sont égales entre elles; mais nous préférons éviter ce langage, qui a l'inconvénient de suggérer une analogie entre les puissances et les grandeurs mesurables, analogie qui n'est pas suffisamment justifiée; nous reviendrons d'ailleurs sur ce point (Note I).

En définitive, pour nous donner l'ensemble U, nous sommes partis d'un ensemble E, de même puissance que U, supposé donné. Il est clair que, d'une manière générale, si l'on regarde un ensemble quelconque comme donné, on pourra regarder comme donnés tous les ensembles de même puissance qu'on peut en déduire par un procédé analogue à celui qui, appliqué à E, nous a donné U. Par exemple, regardons comme donné l'ensemble formé de tous les nombres incommensurables compris entre o et 1; soit α l'un quelconque d'entre eux; prenons d'autre part, sur une circonférence de rayon R, une origine des arcs A

[1] Bien entendu, on suppose que les u_n sont tous différents, ou du moins pensés comme tels.

et marquons tous les points M tels que l'arc AM soit égal à $2\alpha\pi R$. Il est clair que l'ensemble des points M sera ainsi défini : c'est l'ensemble des extrémités des arcs incommensurables avec la circonférence.

Si donc on se propose d'étudier les ensembles dans leur généralité, la première question qui se pose est de savoir combien il y a de puissances différentes et la seconde, de connaître un ensemble possédant chacune des puissances existantes. Mais avant d'aborder ces difficiles questions, et aussi celle de savoir si l'on peut se donner des ensembles par un procédé différent de celui que nous avons indiqué, il ne sera pas inutile d'étudier les ensembles qui ont même puissance que l'*ensemble* E *des nombres entiers positifs*. Nous reconnaîtrons, en effet, que cette puissance est la plus simple possible [1] et que les ensembles qui la possèdent ont des propriétés caractéristiques et importantes.

Les ensembles dénombrables.

Ces ensembles sont dits *ensembles dénombrables ;* voici ce que signifie cette expression : si un ensemble a même puissance que l'ensemble E, nous pouvons toujours convenir de désigner par u_n l'élément qui correspond au nombre entier n ; nous pourrons alors ranger les éléments de l'ensemble dans une suite

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots$$

tout à fait analogue à celle des nombres entiers, dans laquelle chacun des éléments a un rang déterminé, un élément qui le précède et un élément qui le suit immédiatement.

Nous allons indiquer d'abord des classes importantes d'ensembles dénombrables; nous montrerons ensuite qu'il y a des ensembles qui ne sont pas dénombrables, c'est-à-dire qui n'ont pas même puissance que E.

Par définition même, est dénombrable tout ensemble dont

(1) Nous laissons de côté les ensembles composés d'un nombre fini d'éléments ; pour eux la notion de puissance se confond avec la notion de nombre : ils ont même puissance lorsque leurs éléments sont en même nombre.

chaque élément est affecté d'un indice, les indices prenant toutes les valeurs entières et positives. Supposons maintenant que nous ayons des éléments u_α, tels que l'indice α prenne seulement des valeurs entières positives, mais sans les prendre toutes; d'ailleurs, bien entendu, deux éléments différents ont toujours des indices différents. Dans ces conditions, l'ensemble des u_α est encore dénombrable; en effet, les indices α étant des nombres entiers positifs, nous pouvons les ranger par ordre de grandeur croissante, désigner le plus petit par α_1, celui qui est le plus petit parmi les autres par α_2, le suivant par α_3, etc. Si nous posons ensuite

$$u_{\alpha_1} = v_1, \quad u_{\alpha_2} = v_2, \quad u_{\alpha_3} = v_3, \quad \ldots,$$

nous reconnaîtrons que notre ensemble, pouvant se mettre sous la forme

$$v_1, \quad v_2, \quad v_3, \quad \ldots,$$

est *dénombrable*. Par exemple, on pourrait supposer que les indices α sont tous les nombres pairs, ou bien tous les nombres premiers, etc. On reconnaît ainsi que l'ensemble des nombres pairs, par exemple, a *même puissance* que l'ensemble E de tous les nombres entiers, et, effectivement, si l'on fait correspondre à chaque nombre pair le nombre dont il est le double, on aura réalisé une correspondance univoque et réciproque entre ces deux ensembles. On voit combien la notion de puissance se distingue de la notion de nombre; l'axiome arithmétique : le tout est plus grand que la partie, n'a pas d'analogue dans la théorie des puissances : l'ensemble des nombres pairs est une *partie* de E et cependant a même puissance que E ([1]).

Considérons maintenant un nombre limité d'ensembles dénombrables, trois pour fixer les idées

$$\begin{array}{llll} u_1, & u_2, & u_3, & \ldots \\ v_1, & v_2, & v_3, & \ldots \\ w_1, & w_2, & w_3, & \ldots \end{array}$$

([1]) On peut remarquer que la propriété d'avoir même puissance que certaines de leurs parties aliquotes *caractérise* les ensembles infinis; cette propriété a pu être proposée comme définition de ces ensembles, par opposition aux ensembles finis.

Je dis que l'ensemble de tous ces éléments est dénombrable ; il suffit pour nous en convaincre de poser

$$u_i = s_{3i-2}, \qquad v_i = s_{3i-1}, \qquad w_i = s_{3i},$$

ou, si l'on préfère, d'écrire comme il suit les éléments les uns à la suite des autres, en inscrivant au-dessous de chacun d'eux le nombre entier positif correspondant, qui n'est autre que son *rang*

$$\begin{matrix} u_1, & v_1, & w_1, & u_2, & v_2, & w_2, & u_3, & v_3, & w_3, & \ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & \ldots \end{matrix}$$

On conclut de là immédiatement qu'un ensemble dont tous les éléments ont pour indices des nombres entiers différents, positifs ou négatifs, est dénombrable.

Considérons maintenant un ensemble dont chaque élément a plusieurs indices, chaque indice prenant toutes les valeurs entières positives. Si nous nous bornons d'abord au cas de deux indices, nous pourrons écrire cet ensemble de la manière suivante

$$\begin{matrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \ldots \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & \ldots \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & \ldots \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}$$

Pour ranger ses éléments de telle manière qu'il apparaisse nettement qu'il est dénombrable, il nous suffira de les écrire comme il suit :

$$u_{11}; \quad u_{21}, u_{12}; \quad u_{31}, u_{22}, u_{13}; \quad u_{41}, u_{32}, u_{23}, u_{14}; \quad u_{51}, \quad \ldots$$

Le procédé que nous venons d'employer s'étend immédiatement au cas où le nombre des indices dépasse deux ; considérons l'ensemble de tous les éléments

$$u_{m_1, m_2, \ldots, m_p},$$

m_1, m_2, ..., m_p prenant toutes les valeurs entières et positives. Il est clair qu'il y a dans cet ensemble un nombre limité d'éléments pour lesquels on a

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_p = n,$$

n étant un nombre positif déterminé. Si l'on suppose successive-

ment $n = p, p + 1, p + 2, \ldots$ on aura chaque fois un nombre limité d'éléments, que l'on pourra écrire sur une même ligne les uns à la suite des autres. On écrira d'abord l'élément $u_{1,1,\ldots,1}$ qui correspond à $n = p$, puis ceux qui correspondent à $n = p + 1$ (en les rangeant dans un ordre quelconque), puis ceux qui correspondent à $n = p + 2, \ldots$. Comme, pour chaque valeur de n, on en écrit un nombre limité, il est clair que tout élément de l'ensemble occupera dans cette suite un rang fini, car il est obtenu pour une valeur finie de n; l'ensemble est donc dénombrable. Dans le cas où p est égal à 2 ou à 3, on peut donner à ce raisonnement une forme géométrique, que nous allons exposer, en supposant $p = 3$. Elle s'étendrait d'ailleurs aux valeurs de p supérieures à 3 par l'emploi de la géométrie à plus de trois dimensions.

Ayant choisi trois axes rectangulaires et une unité de longueur arbitraire, nous pouvons faire correspondre à l'élément u_{m_1,m_2,m_3} le point dont les coordonnées sont m_1, m_2, m_3. Nous obtenons ainsi tous les points dont les trois coordonnées sont des nombres entiers positifs. L'ensemble de ces points a manifestement même puissance que l'ensemble donné, d'après la manière même dont on l'a obtenu.

Or, cet ensemble de points a évidemment les propriétés suivantes : 1° il contient une infinité de points; 2° une sphère quelconque en renferme un nombre limité. Nous allons montrer que tout ensemble formé de points situés dans l'espace et possédant ces deux propriétés, a même puissance que E, c'est-à-dire est dénombrable. Pour le prouver, il nous suffit de faire voir que nous pouvons *numéroter* les points de cet ensemble au moyen des entiers positifs, de manière que deux points différents aient deux numéros différents et que chaque point ait un numéro unique.

Or, considérons une série de sphères concentriques de rayons croissants; nous supposerons, par exemple, que ces rayons sont successivement tous les nombres entiers positifs : la sphère S_n a pour rayon n. Par hypothèse, la sphère S_1 renferme un nombre limité (qui peut être nul) de points de l'ensemble : nous leur donnerons dans un ordre arbitraire les *numéros* 1, 2, 3, ..., p. La sphère S_2 en renferme aussi un nombre limité; considérons seulement ceux qui ne sont pas encore numérotés et donnons-leur les numéros $p + 1, p + 2, \ldots, q$; nous considérerons ensuite les

points (en nombre limité) situés à l'intérieur de S_3 et non encore numérotés; ils recevront les numéros $q+1$, $q+2$, ..., r. Il est clair que, en procédant ainsi, chaque point aura un numéro différent; d'ailleurs tous les points seront numérotés, car, si R est la distance de l'un d'eux P au centre commun des sphères et si $n-1$ désigne la partie entière de R, le point P sera numéroté lorsqu'on considérera la sphère S_n, ce qui arrivera certainement. L'ensemble des points considérés est donc dénombrable.

On voit que cette démonstration s'applique au cas où tous les indices ou quelques uns d'entre eux prendraient aussi des valeurs entières négatives et aussi au cas où certains indices ne prendraient pas *toutes* les valeurs entières. Mais ce que nous avons dit au sujet du cas où il y a un seul indice doit suffire pour que le lecteur soit convaincu que ce sont là des détails sans importance ne pouvant introduire aucune difficulté. Nous ajouterons seulement une remarque : dans le cas où il y a plusieurs indices, il suffit que l'*un d'eux* puisse prendre une infinité de valeurs, le nombre des valeurs des autres pouvant être limité.

L'une des applications les plus importantes des considérations précédentes est relative aux nombres rationnels. On obtient tous les nombres rationnels $\frac{p}{q}$ en prenant pour q un nombre positif quelconque différent de zéro et pour p un nombre positif ou négatif, premier avec q. Il est clair qu'on obtient ainsi tous les nombres rationnels, et chacun une seule fois. Or, on peut poser

$$\frac{p}{q} = u_{p,q},$$

p et q prenant les valeurs que nous venons de dire; l'ensemble des $u_{p,q}$ est manifestement dénombrable. De même, si nous considérons, dans un espace, à un nombre quelconque (*fini*) de dimensions, tous les points dont les coordonnées sont des nombres rationnels, ils forment aussi un ensemble dénombrable; par exemple, dans l'espace ordinaire, on peut faire correspondre au point

$$x = \frac{p}{q}, \quad y = \frac{p'}{q'}, \quad z = \frac{p''}{q''}$$

l'élément à six indices

$$u_{p,q,p',q',p'',q''}.$$

Ces six indices prennent d'ailleurs une *partie* des valeurs entières (positives ou négatives); cela suffit pour que l'ensemble des éléments considérés forme un ensemble dénombrable.

Remarquons maintenant que les observations présentées plus haut, sur la possibilité d'admettre que, dans une série à un seul indice, l'indice peut prendre seulement *une partie* des valeurs entières positives, sans que l'ensemble cesse d'être dénombrable, équivalent au théorème suivant : *si, par un procédé quelconque, on choisit une infinité d'éléments parmi les éléments d'un ensemble dénombrable, on obtient encore un ensemble dénombrable.*

Il en résulte que, si l'on considère, par exemple dans l'espace à trois dimensions, *une infinité de points à coordonnées toutes rationnelles,* on obtient un ensemble dénombrable, quel que soit le procédé par lequel on a distingué cette infinité de l'ensemble de tous les points à coordonnées toutes rationnelles.

Remarquons, enfin, que lorsque nous parlons des points à *coordonnées rationnelles,* nous devons toujours supposer que nous avons choisi une unité de longueur, laquelle est d'ailleurs arbitraire. On en conclut immédiatement que l'ensemble des points dont les coordonnées sont de la forme

$$x = \frac{m}{n}\alpha, \qquad y = \frac{p}{q}\beta, \qquad z = \frac{r}{s}\gamma,$$

m, n, p, q, r, s étant des entiers arbitraires et α, β, γ des *longueurs quelconques déterminées,* forme un ensemble dénombrable. Plus généralement, il en est de même des points dont les coordonnées peuvent se mettre sous la forme

$$x = \frac{m}{n}\alpha + \frac{m'}{n'}\alpha' + \ldots + \frac{m^{(k)}}{n^{(k)}}\alpha^{(k)},$$

$$y = \frac{p}{q}\beta + \frac{p'}{q'}\beta' + \ldots + \frac{p^{(k)}}{q^{(k)}}\beta^{(k)},$$

$$z = \frac{r}{s}\gamma + \frac{r'}{s'}\gamma' + \ldots + \frac{r^{(k)}}{s^{(k)}}\gamma^{(k)},$$

les longueurs *déterminées* $\alpha, \ldots, \alpha^{(k)}, \beta, \ldots, \beta^{(k)}, \gamma, \ldots, \gamma^{(k)}$, pouvant être en nombre *quelconque,* mais *fini,* et les *entiers* m, n, p, q, r, s, m', n', ... pouvant prendre toutes les valeurs possibles ou étant soumis à des restrictions de nature quelconque.

à condition, bien entendu, qu'il y ait une infinité de points dans l'ensemble.

Les exemples que nous avons donnés nous paraissent suffisants [1] pour faire comprendre au lecteur la nature des ensembles dénombrables, considérés en eux-mêmes; nous allons maintenant les étudier dans leurs rapports avec les autres ensembles. Il est vrai que nous n'avons pas encore démontré l'existence d'ensembles non dénombrables; mais nous pouvons provisoirement postuler cette existence, sans faire aucun cercle vicieux; cette lacune ne tardera d'ailleurs pas à être comblée.

Comparaison des ensembles dénombrables avec les autres ensembles.

Nous allons d'abord montrer que, étant donné un ensemble *infini quelconque,* on peut toujours supprimer parmi ses éléments, une infinité d'éléments formant un ensemble dénombrable, sans que l'ensemble cesse d'être infini. En désignant par A l'ensemble donné, nous pouvons écrire

$$A = D + A',$$

D désignant un ensemble dénombrable et A′ un ensemble infini; le signe + signifie d'ailleurs que l'ensemble A est formé par la réunion des ensembles D et A′ *lesquels n'ont aucun élément commun.*

Pour démontrer cette proposition, il nous suffit de remarquer que, dire que l'ensemble A est infini, c'est dire que, étant donné un nombre quelconque $2n$, l'ensemble A renferme plus de $2n$ éléments. D'après cela, donnons-nous des nombres pairs croissants

$$2n_1, \quad 2n_2, \quad 2n_3, \quad 2n_4, \quad \ldots.$$

L'ensemble A renfermant au moins $2n_1$ éléments, nous pouvons en choisir $2n_1$ et, parmi ces $2n_1$, en désigner un par u_1; l'en-

[1] Dans le Chapitre suivant, nous étudierons un autre ensemble dénombrable très important, celui des nombres algébriques.

semble A renfermant au moins $2n_2$ éléments, nous pouvons en trouver $2(n_2-n_1)$ *ne faisant pas partie des* $2n_1$ *déjà choisis* et désigner l'un d'eux par u_2, ... Il est clair que, en continuant ainsi, nous formerons un ensemble dénombrable

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots$$

que nous pouvons désigner par D et il subsistera une infinité A' d'éléments, à savoir les $2n_1$ d'abord choisis, excepté u_1, les $2(n_2-n_1)$ pris ensuite, sauf u_2, ... plus ceux, s'il y en a [1], qui n'auront pas été choisis.

Ainsi on voit que tout ensemble infini comprend un ensemble dénombrable : en ce sens, on peut dire que la puissance des ensembles dénombrables est la plus petite des puissances.

Une proposition plus importante est la suivante : l'*ensemble infini* A', que l'on obtient en supprimant de A les éléments de l'ensemble dénombrable D, *a même puissance que* A. En effet, de même que nous avons écrit

$$A = D + A',$$

nous pouvons écrire

$$A' = D' + A'',$$

D' étant un ensemble dénombrable et A'' un ensemble infini. D'ailleurs, la réunion des deux ensembles dénombrables D et D' forme un ensemble dénombrable Δ

$$D + D' = \Delta;$$

nous avons, par suite,

$$A = D + A' = D + D' + A'' = \Delta + A''.$$

Il s'agit de prouver que A et A' ont même puissance ; il nous suffit de récrire les égalités

$$A = \Delta + A'',$$

$$A' = D' + A'',$$

et de remarquer que D' et Δ ont même puissance, puisque ce sont deux ensembles dénombrables. A et A' peuvent donc être

[1] On voit aisément qu'il y en aura si l'ensemble A n'est pas dénombrable. Dans ce cas il est évident que, si l'on supprime de A un ensemble dénombrable, il doit rester un ensemble non dénombrable, sinon A serait dénombrable.

regardés comme obtenus en ajoutant à un même ensemble A″ deux ensembles de même puissance D et Δ; ils ont donc évidemment même puissance [1].

Ce théorème est très important [2], parce qu'il nous montre que, lorsqu'on étudie les puissances des ensembles non dénombrables, on peut négliger sans inconvénient un ensemble dénombrable d'éléments. Les ensembles dénombrables jouent ainsi, par rapport aux autres, le même rôle que les infiniment petits vis-à-vis des quantités finies.

Nous allons montrer maintenant qu'il existe effectivement des ensembles non dénombrables en faisant voir que : *l'ensemble des nombres réels compris entre* o *et* 1 *n'est pas dénombrable.* Il suffit, pour le prouver, de montrer que, si l'on a un ensemble dénombrable quelconque

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots,$$

il y a des nombres compris entre o et 1 qui ne font pas partie de cet ensemble. Nous pouvons évidemment supposer que tous les u sont compris entre o et 1. Figurons le segment de droite o-1 et marquons-y les points u_1 et u_2, en supposant, pour fixer les idées, $u_1 < u_2$.

Considérons maintenant les éléments successifs de notre ensemble, dans leur ordre naturel

$$u_3, \quad u_4, \quad u_5, \quad \ldots$$

et soit u_{α_3} le premier d'entre eux qui est compris dans l'intervalle u_1-u_2 (on pourrait avoir $\alpha_3 = 3$). Il est clair que tous les points de l'ensemble compris dans l'intervalle u_{α_3}-u_2 ont un indice supérieur à α_3; car si l'un d'eux avait un indice inférieur à α_3 on aurait dû le prendre au lieu de u_{α_3}. Continuons à considérer les éléments successifs après u_{α_3} et soit u_{α_4} le premier

(1) Il résulte, en effet, de la définition même de la puissance que si deux ensembles peuvent être décomposés en un même nombre d'ensembles ayant respectivement mêmes puissances, ils ont même puissance.

(2) Comme exercice, le lecteur démontrera aisément d'une manière directe que l'ensemble des nombres réels, et l'ensemble A′ des nombres réels *non entiers*, ont même puissance. Il pourra prendre pour D les nombres entiers n et pour D′ les nombres de la forme $n + \frac{1}{2}$, par exemple.

d'entre eux qui est compris dans l'intervalle u_{α_3}-u_2; nous désignerons de même par u_{α_5} le premier élément compris entre u_{α_3} et u_{α_4} et, d'une manière générale, par $u_{\alpha_{n+2}}$ le premier élément compris dans l'intervalle u_{α_n}-$u_{\alpha_{n+1}}$. Il est clair d'abord que, si l'un de ces intervalles ne renfermait aucun point de l'ensemble, nous aurions constaté par cela même l'existence de points compris entre o et 1 et n'appartenant pas à l'ensemble; nous pouvons donc supposer que la suite des α_n se prolonge indéfiniment; d'ailleurs, les α_n étant des nombres entiers croissants, α_n augmente indéfiniment avec n. Enfin, d'après la manière même dont sont choisis les u_{α_n}, tous les éléments de l'ensemble compris entre u_{α_n} et $u_{\alpha_{n+1}}$ ont un indice supérieur à α_{n+1}. Cela posé, les nombres u_1, u_{α_3}, u_{α_5}, ..., $u_{\alpha_{2n+1}}$, ... sont visiblement croissants et tous inférieurs aux nombres décroissants u_2, u_{α_4}, u_{α_6}, ..., $u_{\alpha_{2n}}$, ... La première de ces suites a donc une limite v, la seconde une limite w, et l'on a $v \leqq w$. Je dis que le nombre v n'appartient pas à l'ensemble; en effet, si l'on avait

$$v = u_k,$$

nous pourrions prendre n assez grand pour que l'on ait $\alpha_n > k$ et nous arriverions à cette conclusion contradictoire que l'élément u_k est compris entre u_{α_n} et $u_{\alpha_{n+1}}$, k étant inférieur à α_n. Donc, il y a entre o et 1 au moins un point qui n'appartient pas à l'ensemble dénombrable *choisi arbitrairement*, u_1, u_2, ..., u_n, ... Il en résulte que l'ensemble des points compris entre o et 1 *n'est pas dénombrable* et, par suite, qu'il y a une infinité non dénombrable de points qui n'appartiennent pas à l'ensemble dénombrable considéré [1].

Nous connaissons donc un ensemble non dénombrable; on peut remarquer que l'existence de cet ensemble résulte du théorème suivant : *Des nombres croissants, tous inférieurs à un nombre fixe, ont une limite.* Or ce théorème est une conséquence de la *définition* des nombres incommensurables et, à quelque point de vue que l'on se place, postule la notion du *continu*. Nous ne nous

[1] Ce raisonnement est *analogue* à celui-ci : Étant donné un ensemble, si nous savons démontrer que, lorsqu'on en supprime un nombre *fini quelconque* d'éléments, il en reste *au moins un*, nous pourrons affirmer que l'ensemble renferme une infinité d'éléments et, par suite, qu'il en reste une infinité.

étendrons pas plus sur l'origine et la nature de cette notion que nous ne l'avons fait sur la notion de l'ensemble E des nombres entiers positifs; nous admettrons que l'ensemble C des nombres compris entre 0 et 1 nous est *donné,* sans rechercher comment il pourrait l'être effectivement. Les ensembles ayant même puissance que l'ensemble C seront dits avoir *la puissance du continu.*

Les ensembles qui ont la puissance du continu.

Parmi les ensembles ayant la puissance du continu, nous pouvons citer tout d'abord, d'après un théorème démontré tout à l'heure, les ensembles que l'on obtient en supprimant, parmi les nombres compris entre 0 et 1, *un ensemble dénombrable quelconque;* par exemple, en supprimant tous les nombres rationnels. D'autre part, il est aisé de voir que l'ensemble de tous les points situés sur une droite, ou sur une ou plusieurs courbes analytiques quelconques, a la puissance du continu, car on peut aisément établir une correspondance univoque et réciproque ([1]) entre les points de tels ensembles et les points compris entre 0 et 1.

Il est, d'autre part, évident que, si l'on réunit une infinité dénombrable d'ensembles dont chacun a la puissance du continu, l'ensemble ainsi obtenu a aussi la puissance du continu. Car on peut, par exemple, constater que le premier ensemble a même puissance que les points compris entre 0 et 1, le second même puissance que les points compris entre 1 et 2, le troisième même puissance que les points compris entre 2 et 3, etc., de sorte que l'ensemble formé par la réunion de l'infinité dénombrable d'ensembles considérée a même puissance que l'*ensemble de tous les nombres positifs,* c'est-à-dire la puissance du continu.

Mais un théorème bien plus remarquable et qui est une des plus belles découvertes de M. G. Cantor est le suivant : si l'on a une infinité d'ensembles ayant la puissance du continu, cette infinité (dans laquelle chaque ensemble est regardé comme un élé-

([1]) Si l'on cherche à établir analytiquement une telle correspondance elle pourra laisser de côté des points isolés en nombre limité : nous savons que cela n'a aucune importance.

ment) ayant elle-même la puissance du continu, l'ensemble total formé par la réunion de tous les éléments des ensembles considérés a aussi la puissance du continu. La forme géométrique que l'on peut donner à cet énoncé le rendra peut-être plus clair : considérons deux axes rectangulaires et un carré dont les côtés ont pour équations

$$x = 0, \quad x = 1; \quad y = 0, \quad y = 1.$$

Il est clair que l'on obtient tous les points intérieurs au carré par la réunion de tous les points situés sur toutes les parallèles au côté $y = 0$, menées par les divers points du côté $x = 0$. Sur chacune de ces parallèles on a un ensemble qui a la puissance du continu et l'ensemble de ces parallèles (chacune d'elles étant un élément) a évidemment aussi la puissance du continu. Le théorème de M. G. Cantor revient donc au suivant, et c'est sous cette forme qu'il a été énoncé par son auteur : *l'ensemble des points intérieurs au carré a même puissance que l'ensemble des points compris entre* 0 *et* 1.

Remarquons d'abord que nous pouvons nous borner à considérer les points à coordonnées incommensurables, car nous savons que l'ensemble Γ des nombres incommensurables compris entre 0 et 1 a même puissance que l'ensemble C de tous les nombres compris entre 0 et 1. Nous pouvons établir entre les éléments de Γ et de C une correspondance univoque et réciproque. Désignons par α, β, γ, ..., les éléments de Γ qui correspondent respectivement aux éléments a, b, c, ... de C et faisons correspondre au point de coordonnées

$$x = a, \quad y = b.$$

le point de coordonnées

$$x = \alpha, \quad y = \beta;$$

nous constatons ainsi que l'ensemble des points intérieurs au carré (que l'on y comprenne ou non ceux qui sont sur le périmètre) a même puissance que l'ensemble des points intérieurs dont *les deux coordonnées sont incommensurables*.

Le théorème à démontrer revient donc à ceci : *l'ensemble des points intérieurs au carré et dont les deux coordonnées* x, y,

sont incommensurables, a même puissance que l'ensemble des nombres incommensurables z compris entre 0 *et* 1.

En d'autres termes, il suffit de faire voir que l'on peut, à tout système de deux nombres incommensurables x, y compris entre 0 et 1, faire correspondre un nombre incommensurable z, compris entre 0 et 1, de manière qu'à tout couple x, y corresponde un seul nombre z et, à tout nombre z, un seul couple x, y.

Or il est très aisé de réaliser une pareille correspondance. Il nous suffit de remarquer avec M. G. Cantor que, si l'on réduit en fraction continue un nombre z compris entre 0 et 1, on obtient un développement de la forme

$$z = \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_3 + \cfrac{1}{\alpha_4 + \ldots}}}}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots$ étant des entiers déterminés dont aucun n'est nul. Donc, à tout nombre z considéré correspond une suite bien déterminée d'entiers positifs, dont aucun n'est nul,

$$(1) \qquad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \ldots,$$

et, réciproquement, une telle suite détermine d'une manière unique le nombre z. Cela posé, il nous suffira de déterminer x et y par deux suites infinies extraites de la suite (1), d'après une loi déterminée, par exemple, par les deux suites

$$\alpha_1, \quad \alpha_3, \quad \alpha_5, \quad \ldots.$$
$$\alpha_2, \quad \alpha_4, \quad \alpha_6, \quad \ldots.$$

c'est-à-dire de poser

$$x = \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_3 + \cfrac{1}{\alpha_5 + \ldots}}} \qquad y = \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_4 + \cfrac{1}{\alpha_6 + \ldots}}}$$

Il est clair que la connaissance de z détermine, d'une manière unique, x et y, et que, réciproquement, la connaissance de x et de y détermine z d'une manière unique. La proposition que nous avions en vue est donc établie. Il est clair que la démonstration

ne serait en rien modifiée, si, au lieu de deux variables x, y, on en avait un nombre fini quelconque.

Supposons maintenant que nous ayons une infinité (dénombrable) de variables

$$z_1, \quad z_2, \quad \ldots, \quad z_n, \quad \ldots$$

dont chacune peut prendre toutes les valeurs incommensurables comprises entre o et 1 et appelons *point* tout système de valeurs données à ces variables, deux points étant différents dès que *toutes* les variables n'ont pas les mêmes valeurs pour ces deux points. Je dis que l'ensemble des points ainsi obtenus a la puissance du continu. Pour le faire voir, posons, n étant un indice quelconque et les u des nombres entiers positifs,

$$z_n = \cfrac{1}{u_{n1} + \cfrac{1}{u_{n2} + \cfrac{1}{u_{n3} + \cdots + \cfrac{1}{u_{np} + \cdots}}}}$$

Nous savons, d'une infinité de manières, ranger les termes du tableau à double entrée

$$\begin{array}{ccccc}
u_{11}, & u_{12}, & \ldots, & u_{1p}, & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots, & \ldots & \ldots & \ldots \\
u_{n1}, & u_{n2}, & \ldots, & u_{np}, & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

dans une série simple

$$v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_k, \quad \ldots$$

Choisissons un procédé déterminé (d'ailleurs quelconque) pour opérer cette transformation; nous poserons

$$z = \cfrac{1}{v_1 + \cfrac{1}{v_2 + \cdots}}$$

et nous ferons correspondre le point z au point $(z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots)$. Nous aurons ainsi réalisé la correspondance exigée; on lèverait aisément la restriction imposée aux z d'être incommensurables.

Les considérations précédentes sont très importantes parce qu'elles nous montrent que, *si l'on fait abstraction de la continuité de la correspondance entre deux ensembles continus,* il n'y a pas de différence essentielle entre les ensembles continus à une dimension et les ensembles continus à deux (ou trois ...) dimensions, entre les fonctions d'une variable et les fonctions de plusieurs variables. Nous entrerons plus loin dans quelques détails sur ce sujet (Note III); notre seul but, dans ce Chapitre, a été de préciser un peu la notion d'ensemble.

Voici la conclusion à laquelle nous arrivons; nous connaissons actuellement deux puissances : la puissance des ensembles dénombrables et la puissance du continu; nous pouvons définir des ensembles ayant l'une de ces deux puissances en *supposant définis,* d'une part, l'ensemble E de tous les nombres entiers positifs, d'autre part, l'ensemble C de tous les nombres compris entre 0 et 1. Nous sommes d'ailleurs certains que les puissances de E et de C sont différentes. Ces notions nous suffiront pour les applications que nous avons en vue. Nous reviendrons dans les Notes sur plusieurs points que nous avons laissés de côté et chercherons notamment à éclaircir un peu les notions générales d'ensemble et de puissance.

CHAPITRE II.

LES NOMBRES ALGÉBRIQUES ET L'APPROXIMATION DES INCOMMENSURABLES.

Généralités sur les nombres algébriques.

On appelle *nombre algébrique* toute racine d'une équation algébrique *à coefficients entiers* (¹).

Soit $\alpha + i\beta$ une racine de l'équation

$$f(x) + ig(x) = 0, \tag{1}$$

f et g étant des polynomes à coefficients réels et entiers. Il est clair que l'équation

$$f(y) - ig(y) = 0 \tag{2}$$

admet la racine $\alpha - i\beta$.

Formons l'équation qui admet pour racines toutes les quantités de la forme

$$z = \frac{x+y}{2},$$

x étant une racine quelconque de (1) et y une racine quelconque de (2) et soit

$$F(z) = 0 \tag{3}$$

cette équation. On reconnaît immédiatement

1° Que cette équation a ses coefficients entiers (²);

2° Qu'elle a ses coefficients réels;

3° Qu'elle admet α pour racine.

(¹) Il est clair que si les coefficients d'une équation sont *rationnels*, on peut les rendre entiers sans changer les racines de l'équation.

(²) Après que l'on a, s'il est nécessaire, multiplié son premier membre par un facteur convenable.

On verrait d'une manière analogue que β est racine d'une certaine équation algébrique à coefficients entiers réels.

Il en résulte que l'on peut se borner à considérer les nombres algébriques réels, c'est-à-dire les racines réelles des équations algébriques à coefficients entiers réels. Si α et β sont deux tels nombres, vérifiant respectivement les équations à coefficients entiers

$$F(\alpha) = 0, \tag{4}$$

$$G(\beta) = 0, \tag{5}$$

il est clair que $x = \alpha + i\beta$ vérifiera une équation à *coefficients entiers* que l'on obtiendra en éliminant β entre l'équation (5) et l'équation

$$F(x - i\beta) = 0. \tag{4'}$$

On obtiendra donc aisément tous les nombres algébriques, si l'on connaît les nombres algébriques réels. Cette proposition est d'ailleurs plus curieuse qu'utile et, si nous l'utilisons plus loin, on reconnaîtra aisément que nous pourrions nous en passer en modifiant à peine les raisonnements. Voici une proposition analogue, mais plus générale et plus importante : *les racines des équations à coefficients algébriques sont elles-mêmes des nombres algébriques.*

Considérons en effet une équation

$$f(x, \alpha, \beta, \ldots, \lambda) = 0 \tag{A}$$

f étant un polynome à coefficients entiers par rapport à l'inconnue x et aux nombres algébriques donnés $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$.

Par hypothèse, ces nombres sont des racines d'équations à coefficients entiers

$$\text{(B)} \quad \begin{cases} \varphi(\alpha) = 0, \\ \psi(\beta) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \omega(\lambda) = 0. \end{cases}$$

Il est clair qu'en éliminant $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ entre les équations (A) et (B) on obtiendra une équation à coefficients entiers

$$F(x) = 0$$

qui admettra toutes les racines de (A); donc ces racines sont des nombres algébriques.

Il en résulte que *l'ensemble des nombres algébriques comprend tous les nombres que l'on peut définir à l'aide des nombres entiers supposés connus, et d'un nombre fini d'opérations algébriques.*

Cette proposition montre l'importance des nombres algébriques et fait prévoir qu'ils ont un grand nombre de propriétés arithmétiques intéressantes (1); nous allons en indiquer quelques-unes.

L'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.

Parmi les équations à coefficients entiers que vérifie un nombre algébrique (2), il y en a une dont le degré est moins élevé que celui des autres (3); ce degré sera dit le *degré du nombre algébrique.*

Considérons un nombre algébrique de degré n; il vérifie une équation de la forme

$$(\alpha) \qquad m_0 x^n + m_1 x^{n-1} + \ldots + m_n = 0,$$

$m_0, m_1, \ldots, m_n$ étant des nombres entiers positifs ou négatifs (4).

---

(1) L'une des propriétés les plus importantes des nombres algébriques est la suivante : étant donné un nombre quelconque (fini) de nombres algébriques A, on peut déterminer un nombre algébrique ξ, tel que tous les nombres A soient égaux à des polynomes en ξ à coefficients entiers. Cette proposition se démontre aisément par les méthodes dues au génie de Galois; mais ce n'est point ici le lieu de les développer. On peut consulter à ce sujet quelques Chapitres de M. Jules Drach dans l'*Introduction à l'étude de la Théorie des nombres et de l'Algèbre supérieure* (Paris, Nony, 1895).

(2) Nous nous bornons, pour plus de netteté, aux nombres algébriques réels; il n'y aurait que très peu à modifier dans le cas contraire.

(3) Cette équation est *irréductible* dans le domaine naturel; mais nous n'avons ici nul besoin de la théorie de l'irréductibilité.

(4) Si nous tenons à préciser, c'est-à-dire à ne pas écrire deux fois la même équation, nous pouvons supposer : 1° que m_0 est positif; 2° que $m_0, m_1, \ldots, m_n$ sont *premiers entre eux dans leur ensemble.* Mais ces détails sont ici sans importance.

Si l'équation (α) a p racines réelles [1], nous les désignerons par

$$x_{m_0,m_1,m_2,\ldots,m_n,1},$$
$$x_{m_0,m_1,m_2,\ldots,m_n,2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$x_{m_0,m_1,m_2,\ldots,m_n,p},$$

dans un ordre d'ailleurs arbitraire.

Nous voyons ainsi que les nombres algébriques de degré n peuvent être représentés par une lettre x affectée de $n+2$ indices prenant seulement des valeurs entières (et ne les prenant d'ailleurs pas toutes, ce qui est sans importance); ils forment donc un ensemble dénombrable; si on les désigne par

$$y_1^{(n)},\quad y_2^{(n)},\quad y_3^{(n)},\quad \ldots,\quad y_q^{(n)},\quad \ldots,$$

on voit que *tous* les nombres algébriques peuvent être représentés par une même lettre y affectée de deux indices entiers et *forment par suite un ensemble dénombrable*. Ce résultat fondamental est dû à M. G. Cantor qui l'a établi d'une manière un peu différente. Étant donnée une équation (α), appelons *rang* d'une racine quelconque de cette équation, la somme

$$|m_0| + |m_1| + |m_2| + \ldots + |m_n| + n.$$

Il est manifeste que le nombre des équations de rang donné est limité. En considérant successivement des équations de rang 3, 4, 5, ..., on pourra ainsi ranger tous les nombres algébriques en une série simple, ce qui prouve que leur ensemble est dénombrable. Il est à peine besoin de faire observer que les nombres rationnels sont un cas particulier des nombres algébriques.

Une des conséquences importantes de la proposition de M. G. Cantor, c'est qu'il existe dans tout intervalle une infinité non dénombrable de nombres non algébriques. On peut même affirmer que l'ensemble des nombres non algébriques compris dans un intervalle donné, a la puissance du continu.

L'existence de nombres non algébriques a été reconnue pour la

---

(1) Si l'une de ces racines est un nombre algébrique de degré n, il en est de même des autres, d'après la théorie de l'irréductibilité. Si l'on n'admettait pas ce point, il suffirait de dire que l'on considère seulement celles des racines qui sont des nombres algébriques de degré n.

première fois par Liouville, à l'aide de considérations très intéressantes que nous allons développer dans un instant. Mais le procédé que nous indiquerons, d'après Liouville, pour former des nombres non algébriques est très artificiel et l'on ne connaît aucune propriété des nombres que l'on définit ainsi. Le problème qui consiste à déterminer si un nombre, défini par un procédé *analytique* déterminé, est ou n'est pas algébrique, est un des plus difficiles qui puissent se poser aux géomètres, car il semble qu'on ne puisse indiquer aucune voie générale pour l'aborder; les moyens qui conduisent au but pourront varier complètement suivant la manière dont le nombre est défini.

Aussi, lorsque M. Hermite, en 1873, démontra que le nombre e n'est pas algébrique, ce résultat appela l'attention universelle. C'était en effet le premier exemple *effectif*, si l'on peut ainsi dire, d'un nombre *transcendant* ([1]), c'est-à-dire le premier exemple d'un nombre transcendant défini d'une manière simple par l'analyse et non pas seulement par des séries arithmétiques, comme les nombres de Liouville. Cet exemple était d'ailleurs d'autant plus intéressant que le nombre e, au moins dans l'état actuel de la Science, est le plus important parmi ceux qui s'introduisent en Analyse.

D'ailleurs, une fois la voie ouverte par M. Hermite, on connut bientôt de nouveaux nombres transcendants. M. Lindemann, par une savante généralisation de la méthode employée par M. Hermite pour le nombre e, démontre que π est transcendant. Il démontre même la proposition plus générale suivante :

Si l'on a la relation

$$e^x = y,$$

les nombres x et y ne peuvent pas être tous les deux algébriques, à moins que l'on n'ait

$$x = 0, \qquad y = 1.$$

Si l'on pose $x = 1$, on a $y = e$; c'est le résultat de M. Hermite; si $x = \pi i$, $y = -1$, on obtient le résultat de M. Lindemann cité en premier lieu.

([1]) Tout nombre non algébrique s'appelle *transcendant*.

Nous pouvons donc ajouter à la liste des nombres transcendants *les logarithmes naturels de tous les nombres algébriques* et *tous les nombres dont les logarithmes naturels sont des nombres algébriques*.

Ces propositions, dont l'importance est considérable, parce qu'elles nous font connaître des nombres transcendants très simplement définis, ne nous donnent, comme il est aisé de s'en assurer, qu'une infinité dénombrable de nombres transcendants. Au contraire, les procédés de Liouville, que nous allons maintenant exposer, en font connaître une infinité non dénombrable.

Les recherches de Liouville.

La méthode de Liouville consiste essentiellement dans la considération des nombres rationnels qui *approchent* d'un nombre incommensurable déterminé.

Désignons par ξ un nombre algébrique réel *de degré n*, vérifiant l'équation à coefficients entiers

$$f(\xi) = 0.$$

Soit $\frac{p}{q}$ une fraction irréductible, valeur *approchée* de ξ; d'une manière précise, nous supposons que $\frac{p}{q}$ est compris dans un certain intervalle α, β contenant ξ, et d'ailleurs quelconque; il est clair que, si x appartient à l'intervalle α, β, il existe un nombre M tel que l'on ait

(1) $$|f'(x)| < M.$$

Cela étant, remarquons que, $f(x)$ étant un polynome à coefficients entiers, si l'on y remplace x par un nombre rationnel $\frac{p}{q}$, on obtiendra un résultat de la forme

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{A}{q^n},$$

A étant un nombre entier; donc, si $\frac{p}{q}$ n'est pas racine [1] de

[1] On peut toujours supposer que l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de racine rationnelle; sinon le nombre ξ vérifierait une équation plus simple.

l'équation $f(x)=0$, on a $|A|\geq 1$ et, par suite,

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geq \frac{1}{q^n}. \tag{2}$$

Cela posé, supposons que $\frac{p}{q}$ soit dans l'intervalle α, β et remarquons que, par hypothèse, $f(\xi)$ est nul; on a

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{p}{q}-\xi\right) f'\left[\xi+\theta\left(\frac{p}{q}-\xi\right)\right], \qquad 0<\theta<1.$$

On peut donc écrire, en vertu des inégalités (1) et (2),

$$M\left|\frac{p}{q}-\xi\right| \geq \frac{1}{q^n},$$

c'est-à-dire

$$\left|\frac{p}{q}-\xi\right| \geq \frac{1}{Mq^n}. \tag{A}$$

Ainsi, étant donné un nombre algébrique ξ, de degré n, et un intervalle α, β comprenant ξ, *on peut déterminer un nombre* M *tel que, quel que soit le nombre* $\frac{p}{q}$ *dans l'intervalle* α, β, *on ait l'inégalité* (A).

Si nous supposons $q>M$, l'inégalité (A) devient

$$\left|\frac{p}{q}-\xi\right| > \frac{1}{q^{n+1}}. \tag{B}$$

On voit d'ailleurs aisément que cette inégalité est, au moins pour les valeurs de q dépassant une certaine limite, vérifiée même lorsque $\frac{p}{q}$ est extérieur à l'intervalle α, β.

Nous pouvons donc affirmer que, ξ étant un nombre algébrique de degré n, *on a l'inégalité* (B) *dès que q dépasse une certaine limite* (limite qui ne dépend que de ξ).

Nous pouvons donc affirmer que, étant donné un nombre ξ, s'il existe des valeurs de q dépassant toute limite et telles que l'on ait pour chacune d'elles

$$\left|\frac{p}{q}-\xi\right| < \frac{1}{q^{n+1}}, \tag{β}$$

le nombre ξ ne peut pas être un nombre algébrique de degré n.

Supposons maintenant que nous puissions faire la même démon-

stration pour chaque valeur de n, *nous pourrons affirmer que* ξ *est un nombre transcendant.*

Il importe de remarquer que, si l'on donne à $\frac{p}{q}$ et à ξ des valeurs déterminées, l'inégalité (β) ne peut être vérifiée que pour un nombre fini de valeurs de n; mais il peut arriver que, ξ étant donné, *quelle que soit la valeur fixe attribuée à* n, l'inégalité (β) soit vérifiée pour une infinité de valeurs de $\frac{p}{q}$; *mais ces valeurs ne restent pas toutes les mêmes lorsque* n *varie.* L'essentiel, pour qu'on puisse affirmer la transcendance de ξ, est qu'il y ait, pour chaque valeur de n, une infinité de valeurs de $\frac{p}{q}$ donnant lieu à l'inégalité (β).

Or, il est facile de former des nombres ξ ayant cette propriété; posons

$$(3) \qquad \xi = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^{1.2}} + \frac{\alpha_3}{10^{1.2.3}} + \frac{\alpha_4}{10^{1.2.3.4}} + \ldots + \frac{\alpha_n}{10^{1.2.3\ldots n}} + \ldots,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ étant des nombres entiers positifs que, pour fixer les idées, je suppose inférieurs à 10, de sorte que ξ est en réalité écrit sous forme de fraction décimale [1]. Désignons par $\frac{p}{q}$ la somme des m premiers termes de la série qui définit ξ; nous avons évidemment $q = 10^{1.2.3\ldots m}$ et

$$\xi = \frac{p}{q} + \frac{\alpha_{m+1}}{q^{m+1}} + \frac{\alpha_{m+2}}{q^{(m+1)(m+2)}} + \ldots.$$

On en conclut immédiatement

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^m}.$$

Il suffit donc de prendre $m > n + 1$ pour prouver que l'inégalité (β), dans laquelle n a une valeur déterminée, est vérifiée pour une infinité de valeurs de $\frac{p}{q}$. Le nombre ξ est donc transcendant.

Il est aisé de voir que l'on peut ainsi définir une infinité non dénombrable de nombres transcendants et même, si l'on veut,

---

(1) On suppose qu'il y a une infinité de nombres α qui ne sont pas nuls.

une infinité ayant la puissance du continu. Posons, en effet,

$$(4) \qquad \xi' = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3} + \ldots + \frac{\alpha_n}{10^n} + \ldots.$$

Si l'on donne aux α toutes les valeurs entières inférieures à 10, ξ' prendra toutes les valeurs comprises entre 0 et 1. Si l'on suppose de plus qu'il y a une infinité de nombres α qui ne sont pas nuls, on exclura en apparence certaines valeurs rationnelles des ξ'; mais on obtiendra ces valeurs en remarquant que 0,5, par exemple, peut s'écrire 0,49999 ... et que, dans la série (3), on n'a pas exclu le cas où, à partir d'un certain rang, tous les α sont égaux à 9. On a donc un ensemble ayant la puissance du continu. Or, si à chaque élément ξ' de cet ensemble, on fait correspondre le nombre ξ pour lequel les α ont la même valeur dans les formules (3) et (4), on aura défini un ensemble de nombres transcendants ξ ayant la puissance du continu. C'est le résultat que nous voulions obtenir.

L'approximation des nombres incommensurables.

La remarquable propriété des nombres algébriques, que nous avons démontrée d'après Liouville, nous amène à dire quelques mots de l'approximation des incommensurables en général. On sait que, étant donné un nombre incommensurable α, on peut trouver, d'une infinité de manières, une suite infinie de nombres commensurables ayant pour limite α; chacun d'eux peut être regardé comme une *valeur approchée* de α; mais il est clair que la connaissance d'une ou de plusieurs de ces *valeurs approchées* ne peut fournir aucun renseignement sur la nature arithmétique [1] de α; il en est tout autrement si l'on considère une *infinité* de valeurs rationnelles de plus en plus approchées, comme nous allons le voir. Mais il importe tout d'abord de mettre un peu d'ordre parmi ces valeurs approchées et c'est là le but de la théorie des fractions continues arithmétiques. Je rappelle brièvement les résultats fondamentaux de cette théorie.

Étant donné un nombre incommensurable réel α, on peut le

---

[1] A cause de l'homogénéité du continu.

mettre, d'une seule manière, sous la forme

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}}$$

les a étant des nombres *entiers* dont le premier seul (a_0) peut être nul ou négatif, les autres étant essentiellement positifs. Si l'on pose

$$\begin{array}{llll} P_0 = 1, & P_1 = a_0, & \ldots, & P_{n+1} = a_n P_n + P_{n-1} \\ Q_0 = 0, & Q_1 = 1, & \ldots, & Q_{n+1} = a_n Q_n + Q_{n-1}, \end{array}$$

les fractions *irréductibles* $\frac{P_n}{Q_n}$ sont les *réduites*.

Elles sont alternativement approchées par excès et par défaut, et l'on a

$$P_n Q_{n+1} - P_{n+1} Q_n = (-1)^n.$$

On déduit aisément de là la propriété fondamentale des réduites : chacune d'elles est plus approchée que toute fraction ayant les termes plus petits. En d'autres termes, $\frac{a}{b}$ étant une fraction quelconque et $\frac{P_n}{Q_n}$ une réduite, si l'on a

$$\left|\frac{a}{b} - \alpha\right| < \left|\frac{Q_n}{P_n} - \alpha\right|,$$

on peut en conclure $a > P_n$, $b > Q_n$.

Il résulte de là que, dans l'étude de l'approximation du nombre α au moyen de nombres rationnels, on peut en général [1] se borner à considérer les réduites. Il est d'ailleurs aisé d'indiquer deux limites de l'approximation obtenue à l'aide d'une réduite donnée. Nous supposons, pour plus de netteté, α positif.

Nous partirons des inégalités évidentes

$$\left|\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n+2}}{Q_{n+2}}\right| < \left|\frac{P_n}{Q_n} - \alpha\right| < \left|\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}\right|.$$

---

[1] Dans certaines questions, il pourrait y avoir intérêt à considérer aussi les *fractions intermédiaires*. (*Voir*, par exemple, SERRET, *Algèbre supérieure*, 5e édition, t. I.)

En remarquant que

$$|P_n Q_{n+2} - P_{n+2} Q_n| = a_{n+1}$$

et

$$|P_n Q_{n+1} - Q_n P_{n+1}| = 1,$$

on en conclut

(1) $$\frac{1}{Q_n Q_{n+2}} < \left|\frac{P_n}{Q_n} - \alpha\right| < \frac{1}{Q_n Q_{n+1}}.$$

On a d'ailleurs

$$Q_{n+1} = a_n Q_n + Q_{n-1},$$
$$Q_{n+2} = a_{n+1} Q_{n+1} + Q_n$$

et l'on en déduit

$$a_n Q_n < Q_{n+1} < (a_n + 1) Q_n,$$
$$Q_{n+2} < (a_n a_{n+1} + a_{n+1} + 1) Q_n.$$

Les inégalités (1) deviennent enfin

(2) $$\frac{1}{(a_n a_{n+1} + a_{n+1} + 1) Q_n^2} < \left|\frac{P_n}{Q_n} - \alpha\right| < \frac{1}{a_n Q_n^2}$$

et fournissent deux limites de l'approximation donnée par la réduite de rang n.

Pour en donner une application immédiate, supposons que α soit un nombre algébrique déterminé de degré r, nous savons qu'il existe un nombre M tel que l'on ait, quels que soient p et q,

$$\left|\frac{p}{q} - \xi\right| < \frac{1}{M q^r}.$$

En prenant $p = P_n$, $q = Q_n$ et comparant avec la deuxième des inégalités (2), on en conclut

(3) $$a_n < M Q_n^{r-2}.$$

Ainsi, étant donné un nombre algébrique α de degré r, on peut trouver un nombre M tel que l'inégalité (3) ait lieu pour toute valeur de n. Dans le cas où $r = 2$, on voit que tous les a_n sont inférieurs à un nombre fixe M, ce qui s'accorde avec ce résultat bien connu que la fraction continue est alors périodique. Il est évidemment très aisé de former des fractions continues qui ne vérifient pas l'inégalité (3), soit pour une valeur déterminée

de r, soit même quel que soit r (¹) : on a ainsi de nouveaux exemples de nombres transcendants.

Mais ces résultats, déduits de la seconde des inégalités (2), ne diffèrent pas sensiblement de ceux que nous avions obtenus par la simple considération des fractions décimales; au contraire, la première des inégalités (2), que nous récrirons sous la forme suivante

$$(4) \qquad \left|\frac{P_n}{Q_n} - \alpha\right| > \frac{1}{(a_n a_{n+1} + a_{n+1} + 1)Q_n^2},$$

va nous permettre d'obtenir des résultats auxquels ne conduirait pas la seule théorie des fractions décimales. Supposons que tous les quotients incomplets a_n soient compris entre 1 et 10, par exemple :

$$(5) \qquad 1 \leq a_n < 10 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

et désignons par b un nombre entier quelconque compris entre Q_{n-1} et Q_n; nous avons,

$$(6) \qquad Q_n > b > Q_{n-1} > \frac{1}{10} Q_n$$

puisque $Q_n < (a_{n-1} + 1)Q_{n-1}$ et $a_{n-1} + 1 \leq 10$. D'autre part, a étant un entier quelconque, on a, en utilisant les inégalités (4), (5), (6) et la propriété fondamentale des réduites,

$$\left|\frac{a}{b} - \alpha\right| > \left|\frac{P_n}{Q_n} - \alpha\right| > \frac{1}{100 Q_n^2} > \frac{1}{10000 b^2}.$$

Ainsi, l'inégalité (5) a pour conséquence la suivante

$$(7) \qquad \left|\frac{a}{b} - \alpha\right| > \frac{1}{10000 b^2},$$

a et b étant des entiers arbitraires. Nous voyons ainsi que la propriété des nombres algébriques, due à Liouville, n'est nullement caractéristique et que l'on peut trouver une infinité de nombres transcendants α vérifiant l'inégalité (7), c'est-à-dire se comportant, au point de vue de l'approximation, comme les nombres algébriques du *second* degré.

(¹) Il suffit, par exemple, de prendre $a_n > Q_n^n$.

Il est clair, en effet, que l'ensemble des nombres α, dont le développement en fraction continue satisfait aux inégalités (5), a même puissance que l'ensemble des nombres α' définis par l'égalité

$$\alpha' = \frac{a_1 - 1}{9} + \frac{a_2 - 1}{9^2} + \ldots + \frac{a_n - 1}{9^n} + \ldots,$$

les a vérifiant toujours les inégalités (5) et il est clair que l'ensemble des α' n'est autre (¹) que l'ensemble des nombres compris entre 0 et 1 (y compris 0 et 1). L'ensemble des α a donc la puissance du continu et renferme par suite des nombres transcendants.

(¹) *Voir* la remarque faite page 29 sur le cas où, à partir d'un certain rang, tous les a_n seraient égaux à 9 (et, par suite, les $a_n - 1$ à 8). D'ailleurs cette difficulté, ne concernant qu'une infinité dénombrable de points, est ici sans importance.

CHAPITRE III.

LES ENSEMBLES PARFAITS ET LES ENSEMBLES MESURABLES.

Nous avons considéré jusqu'ici les ensembles à un point de vue purement abstrait; la notion de puissance peut être conçue indépendamment de la nature des éléments et une représentation concrète nous a été commode, mais non indispensable (¹) pour distinguer entre elles les puissances que nous avons appris à connaître. Nous allons, au contraire, étudier, dans ce Chapitre, deux notions de la plus grande importance, mais en relation étroite avec la signification concrète particulière des éléments de l'ensemble.

Nous supposerons que les éléments sont des points d'une droite, et le lecteur verra sans peine quelles considérations s'étendent au plan, ou à un espace d'un nombre quelconque de dimensions (²).

Les ensembles parfaits.

La notion fondamentale d'où découlent toutes les considérations développées dans ce paragraphe est celle *d'ensemble dérivé*. *On appelle ensemble dérivé d'un ensemble donné l'ensemble des points tels que, dans le voisinage de chacun d'eux, se trouve une infinité de points de l'ensemble donné*. En d'autres termes, soit A l'ensemble donné, la lettre a désignant l'un quelconque de ses éléments. On dira qu'un point a' est un *point*

(¹) On peut dire tout au moins qu'une représentation concrète *déterminée* n'est pas indispensable, ou, si l'on veut, que les propriétés étudiées (par exemple, p. 13) sont indépendantes de l'exemple concret choisi.

(²) On peut voir à ce sujet JORDAN, *Cours d'Analyse*, t. I, 2ᵉ édition.

limite de l'ensemble A si, quelque petit que soit ε, il existe un point a distinct de a' et dont la distance à a' soit inférieure à ε. L'ensemble des points limites a' constitue un ensemble A', qui est dit *dérivé* de A. On voit que cette définition fait intervenir des éléments étrangers à l'ensemble lui-même, mais dépendant seulement de sa représentation concrète : par exemple, les points de la droite qui n'appartiennent pas à l'ensemble.

Pour donner immédiatement une application de cette définition, démontrons que, si l'ensemble A' se réduit à un point, l'ensemble A est dénombrable. Remarquons d'abord qu'un intervalle fini qui ne renferme aucun point de A' ne peut renfermer qu'un nombre limité de points de A ([1]); dès lors, si nous supposons que le point unité de A' a une abscisse nulle et si nous considérons tous les intervalles de l'une des deux formes

$$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\right) \qquad (n,\ n+1),$$

n étant un nombre entier positif ou négatif (différent de o et de — 1), chacun de ces intervalles renfermera un nombre limité de points de A. Or ces intervalles sont en infinité dénombrable et tout point de A est compris dans l'un d'eux (sauf le point zéro, s'il appartient à A); donc l'ensemble A est dénombrable.

On appelle ensemble parfait tout ensemble qui est identique avec son dérivé. Un exemple simple fera comprendre le sens de cette dénomination. Considérons l'ensemble A formé des points compris entre *zéro* et *un, non compris zéro* et *un*. Il est clair que l'ensemble A' se compose de l'ensemble A, plus les points *zéro* et *un :* l'ensemble n'est pas parfait; il le devient si on lui adjoint les points *zéro* et *un*. De même, l'ensemble des points intérieurs à un cercle n'est pas *parfait,* si l'on ne considère pas tous les points de la circonférence comme en faisant partie.

La définition que nous venons de donner est celle de M. G. Cantor; M. Jordan donne une définition différente : il appelle

---

([1]) Car s'il en renfermait une infinité, on pourrait le diviser en deux intervalles, chacun de ceux-là en deux, etc., et dans chaque division, un intervalle partiel au moins renfermerait une infinité de points; ces intervalles partiels de plus en plus petits et compris les uns dans les autres tendent vers un point limite.

ensemble parfait un ensemble qui contient tous les points de son dérivé, mais qui peut contenir aussi des points n'appartenant pas à son dérivé. Nous verrons qu'il est à peu près indifférent de choisir l'une ou l'autre de ces deux définitions; lorsqu'il sera nécessaire de préciser nous dirons qu'un ensemble parfait de M. Cantor est *absolument parfait,* et un ensemble parfait de M. Jordan *relativement parfait.* Mais nous allons tout d'abord démontrer le théorème suivant qui fait voir pourquoi cette distinction n'est pas essentielle : *tout ensemble relativement parfait ne diffère de son dérivé que par une infinité dénombrable de points.*

Il s'agit de prouver que, si un ensemble A contient tous les points de A', l'ensemble B des points de A qui n'appartiennent pas à A' est dénombrable. Supposons, pour fixer les idées, que tous les points de A appartiennent à un segment fini de droite; on verra aisément qu'une démonstration à peine différente s'appliquerait au cas où A est formé de points quelconques d'un espace à n dimensions. Soit b un point de B, c'est-à-dire un point de A qui n'appartient pas à A'; je dis qu'il existe un nombre h tel qu'il n'y ait pas de point de A' dans l'intervalle $b - h$, $b + h$. Car, si un tel nombre h n'existait pas, il y aurait des points de A' aussi rapprochés que l'on veut de b, et, par suite, des points de A aussi rapprochés que l'on veut de b, qui serait par suite un point de A' contrairement à l'hypothèse (¹).

Ce premier point établi, je dis que, h étant un nombre positif quelconque, les points de B tels qu'il n'existe pas de point de A' dans l'intervalle $b - h$, $b + h$, *sont en nombre limité.* En effet, soit b_1 un de ces points; par hypothèse, l'intervalle $b_1 - h$, $b_1 + h$ ne renferme pas de point de A'; il renferme donc un nombre limité de points de A et, par suite, un nombre limité de points de B. Soit b_2 un autre point de B, non situé dans l'intervalle $b_1 - h$, $b_1 + h$; l'intervalle $b_2 - h$, $b_2 + h$ renfermera de même un nombre limité des points cherchés. Désignant par b_3 un des points cherchés,

(¹) En d'autres termes, soit ε une constante positive quelconque; il existerait un point a' de A' tel que $|a' - b| < \varepsilon$; mais, d'après la définition de A', il existe un point a de A (distinct de b) et tel que $|a - a'| < \varepsilon$; on a donc $|a - b| < 2\varepsilon$ et, comme ε est arbitraire, b est un point de A'.

n'appartenant pas à ces deux intervalles, nous considérerons de même l'intervalle $b_3 - h$, $b_3 + h$.

Or il est clair que, le point milieu de chacun de ces intervalles n'appartenant jamais à un autre intervalle, n de ces intervalles, dont chacun a une longueur $2h$, recouvrent, si l'on a soin de ne pas compter deux fois les parties communes, une longueur totale au moins égale à $(n+1)h$; leur nombre est donc forcément limité, et, par suite, le nombre des points de B ayant la propriété requise.

Considérons maintenant une suite arbitraire de nombres positifs décroissants et tendant vers zéro, par exemple :

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots,$$

et soit B_n l'ensemble des points de B définis en prenant $h = \frac{1}{n}$; B_n comprend un nombre limité de points; soit C_n l'ensemble des points qui appartiennent à B_n et n'appartiennent pas à B_{n-1} (il est clair que B_n renferme tous les points de B_{n-1}); on aura

$$B = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots + C_n + \ldots$$

et, chacun des termes de cette somme renfermant un nombre limité de points, B est dénombrable. On remarquera que nous sommes assurés que tout point de B appartient à un groupe C_n de rang déterminé, par le théorème que nous avons démontré d'abord : à tout point b de B correspond un nombre fini h, tel qu'il n'y ait pas de point de A' dans l'intervalle $b - h$, $b + h$.

On voit qu'un ensemble relativement parfait ne fait défaut à la définition de l'ensemble absolument parfait, que par une infinité dénombrable de points. On ne peut cependant pas en conclure que *tout ensemble relativement parfait est formé d'un ensemble absolument parfait et d'un ensemble dénombrable*; car, si nous conservons nos notations, A est formé de l'ensemble A' et de l'ensemble dénombrable B; mais l'ensemble A' n'est peut-être pas absolument parfait : il coïncide avec le dérivé de A, mais non nécessairement avec le dérivé de A', car A' n'est qu'une partie de A. La proposition que nous venons d'énoncer est cependant

exacte (¹); mais sa démonstration est trop longue pour que nous la donnions ici, n'ayant pas besoin du théorème par la suite.

On peut remarquer que, chemin faisant, nous avons implicitement démontré ce théorème : *tout ensemble dérivé* A' *est relativement parfait,* c'est-à-dire contient son dérivé A''; car, tout point de A'', ayant dans son voisinage des points de A', a aussi dans son voisinage des points de A, et par suite appartient à A'.

La notion opposée à celle d'ensemble parfait est celle d'ensemble *isolé* : on appelle ainsi tout ensemble qui n'a aucun élément commun avec l'ensemble dérivé; on démontre qu'un tel ensemble est dénombrable par un raisonnement identique à celui des pages 36, 37; mais, tout ensemble dénombrable n'est pas *isolé;* par exemple, l'ensemble des nombres rationnels compris entre 0 et 1 admet comme ensemble dérivé l'ensemble de tous les nombres compris entre 0 et 1; il n'est donc pas isolé.

Nous dirons qu'un ensemble A est *dense* (²) *dans un intervalle* a, b, lorsque tout intervalle, quelque petit qu'il soit, renfermé dans a, b, contient des points de A. Dès lors, l'ensemble dérivé A' comprend tous les points de a, b. Donc, un ensemble A, dense dans l'intervalle a, b comprend, s'il est parfait, tous les points de a, b. Cette remarque fait comprendre l'importance de la notion d'*ensemble parfait;* l'étude et la classification de ces ensembles est beaucoup plus simple que l'étude des ensembles non parfaits, surtout quand ceux-ci ne sont pas dénombrables. Mais j'ai hâte de quitter ces généralités pour montrer comment on se trouve naturellement conduit à considérer certains ensembles parfaits, lorsqu'on étudie de plus près la question qui a fait l'objet du Chapitre précédent.

(¹) Le résultat essentiel d'où se déduit immédiatement cette proposition est dû à M. Bendixon : *Acta mathematica,* t. II, p. 419, théorèmes D, E, F.

(²) On emploie souvent l'expression : *condensé dans l'intervalle* a, b, dans le sens que nous donnons à *dense dans l'intervalle* a, b. Il nous semble que cette expression n'est guère correcte et peut donner lieu à des erreurs : le mot *condensé,* de même que les mots *compris, concentré, concourant, contenu,* semblant impliquer réunion de tous les éléments en un même lieu, et par suite le complément précédé de *dans,* paraissant avoir, après *condensé,* le même sens *absolu* que dans la phrase : *x est compris dans l'intervalle a, b* et non le sens *relatif* qu'il a lorsqu'on dit : *y est positif dans l'intervalle a, b* (mais pourrait être positif aussi dans d'autres intervalles). Les Allemands emploient d'ailleurs le mot *dicht* et non le mot *verdicht.*

Les ensembles parfaits qui ne sont denses dans aucun intervalle.

Considérons les nombres rationnels compris entre 0 et 1 et associons à chacun d'eux $\frac{p}{q}$ l'intervalle

(1) $$\frac{p}{q} - \frac{1}{q^3}, \quad \frac{p}{q} + \frac{1}{q^3}.$$

Nous obtenons ainsi une infinité dénombrable d'intervalles situés sur la droite ; nous allons considérer l'ensemble A des points qui sont compris entre 0 et 1 et qui n'appartiennent à aucun de ces intervalles ; on remarquera que chaque extrémité de tout intervalle, ayant une abscisse rationnelle, est le milieu d'un autre intervalle ; il n'est donc pas nécessaire de spécifier si l'on considère les extrémités d'un intervalle comme en faisant ou n'en faisant pas partie : la définition de A n'en est pas modifiée.

Il est à peine besoin d'indiquer le lien étroit qu'il y a entre la considération de l'ensemble A et la question de l'approximation des incommensurables. Il est clair que A est formé des nombres incommensurables ξ ayant cette propriété que l'on a, quel que soit $\frac{p}{q}$,

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^3}.$$

Qu'il existe de tels nombres ξ, nous en sommes assurés par la théorie des fractions continues ; tel est, par exemple, le nombre $\frac{\sqrt{2}}{2}$; mais cette théorie nous apprend peu de chose sur l'ensemble A ; de plus, elle repose sur des propriétés particulières des nombres rationnels et ne s'étendrait pas, au moins aisément, à l'approximation des incommensurables par des nombres algébriques d'une classe déterminée, par exemple.

Nous pouvons d'abord démontrer sans peine que l'ensemble A est parfait ; car, si un point a' de A' n'appartenait pas à A, a' devrait être intérieur à l'un des intervalles (1) (sans coïncider avec ses extrémités), ce qui est absurde puisque cet intervalle ne contient

pas de point de A. Donc, tout point de A′ appartient à A. Nous pouvons affirmer, par suite, que A n'est *dense* dans aucun intervalle; car, si A était dense dans un intervalle, il comprendrait tous les points de cet intervalle, ce qui est absurde puisque les points $\frac{p}{q}$ ne font pas partie de A et qu'il y en a dans tout intervalle.

Nous avons ainsi un exemple d'un ensemble parfait (¹), qui n'est dense dans aucun intervalle. Il importe d'approfondir la nature d'un tel ensemble et, tout d'abord, de démontrer qu'il n'est pas dénombrable, sans faire appel à la théorie des fractions continues.

Soit 0-1 un intervalle donné; sa *longueur* est égale à *un*; soit a_1-b_1 un intervalle compris dans l'intervalle 0-1 et de longueur α_1; il est clair que l'ensemble A des points qui appartiennent à l'intervalle 0-1 sans appartenir à l'intervalle a_1-b_1 est formé de tous les points de certains intervalles dont la longueur totale est $1 - \alpha_1$. (Si, pour fixer les idées, on suppose $0 < a_1 < b_1 < 1$, ces intervalles sont 0-a_1 et b_1-1.)

Soit maintenant a_2-b_2 un autre intervalle compris dans l'intervalle 0-1 et n'ayant aucun point commun avec l'intervalle a_1-b_1; soit α_2 la longueur de a_2-b_2 (α_2, de même que α_1, est essentiellement positif). Il est clair que l'ensemble A des points de l'intervalle 0-1 qui n'appartiennent ni à a_1-b_1, ni à a_2-b_2 est formé de tous les points d'un nombre limité d'intervalles, dont la longueur totale est $1 - \alpha_1 - \alpha_2$.

Plus généralement, si l'on supprime de l'intervalle 0-1 un nombre limité d'intervalles a-b_1, a_2-b_2, ..., a_n-b_n, n'ayant aucune partie commune, et de longueurs respectives α_1, α_2, ..., α_n, l'ensemble A des points restants est formé de tous les points de certains intervalles, en nombre limité, et dont la longueur totale est

$$1 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n).$$

Si l'on ne faisait plus l'hypothèse que les ensembles a_1-b_1, a_2-b_2, ..., a_n-b_n n'ont pas de point commun, la conclusion

(¹) Nous savons d'ailleurs déjà par la théorie des fractions continues que A n'est pas dénombrable; nous pouvons donc, d'après le théorème de M. Bendixon, en déduire un ensemble *absolument parfait* et ayant la même propriété.

serait la même, sauf que l'on pourrait affirmer seulement que la somme des intervalles dont les points forment A est *supérieure ou égale* à $1 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)$. Dans tous les cas, si l'on suppose

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n < 1,$$

cette somme n'est certainement pas nulle et, par suite, l'ensemble A a la puissance du continu.

Supposons maintenant que, à chaque nombre entier n, nous fassions correspondre un intervalle a_n-b_n, de longueur α_n; en d'autres termes, que nous supprimions de l'intervalle 0-1 les points d'une infinité dénombrable d'intervalles; supposons, en outre, que la série à termes positifs

$$s = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \ldots$$

soit convergente et que sa somme s vérifie l'inégalité

$$s < 1;$$

que pourrons-nous dire de l'ensemble A formé des points de l'intervalle 0-1 qui n'appartiennent à aucun des intervalles a_n-b_n? On peut remarquer que cet ensemble peut n'être dense dans aucun intervalle; il est d'ailleurs aisé de voir qu'il comprend tous les points des intervalles dans lesquels il est dense; mais une première question se pose avant toutes celles-là : cet ensemble A existe-t-il? c'est-à-dire : peut-on conclure de l'inégalité

$$s < 1,$$

qu'il y a des points n'appartenant à aucun des intervalles a_n-b_n? Bien que ce point soit à peu près évident, il ne sera pas inutile de le démontrer en toute rigueur, car cela nous fournira l'occasion de faire plusieurs remarques importantes.

La première de ces remarques est la suivante : nous voulons démontrer qu'il existe des points non intérieurs à certains intervalles; ou, en d'autres termes, que l'hypothèse d'après laquelle tout point du segment 0-1 appartient à l'un de nos intervalles est absurde; *je dis que l'on peut ne considérer comme appartenant à un intervalle que les points intérieurs, à l'exclusion*

des extrémités. En effet, agrandissons, à chacune des extrémités, chaque intervalle a_n-b_n d'une fraction ε de sa longueur; c'est-à-dire prenons $b_n b'_n = a_n a'_n = \varepsilon a_n b_n$, les points a'_n et b'_n étant d'ailleurs extérieurs à l'intervalle a_n-b_n.

L'intervalle a'_n-b'_n a pour longueur $(1 + 2\varepsilon) a_n b_n$; la somme de tous les intervalles a'_1-b'_1, a'_2-b'_2, ... est donc $s' = (1 + 2\varepsilon)s$; mais, si l'on a

$$s < 1,$$

on pourra toujours choisir un nombre positif ε tel que l'on ait

$$(1 + 2\varepsilon)s < 1.$$

Or l'hypothèse que tout point de l'intervalle 0-1 serait compris dans un des intervalles a_n-b_n (sans exclure les extrémités) conduirait à ce résultat, que tout point est compris dans un des intervalle a'_n-b'_n (en excluant les extrémités); nous allons montrer que cette dernière hypothèse est incompatible avec l'inégalité

$$s' < 1.$$

Nous allons démontrer pour cela le théorème suivant, dans l'énoncé duquel il est *expressément* entendu que les mots *intérieur à un intervalle* excluent les extrémités.

Si l'on a sur un segment limité de droite une infinité dénombrable d'intervalles partiels, tels que tout point de la droite soit intérieur à l'un au moins des intervalles, il existe ([1]) *un* NOMBRE LIMITÉ *d'intervalles choisis parmi les intervalles donnés et ayant la même propriété* (*tout point de la droite est intérieur à, au moins, l'un d'eux*). Numérotons nos intervalles d'après une loi quelconque, mais déterminée; je dis qu'il existe un nombre N, tel que tout point de la droite soit à l'intérieur d'un intervalle dont le rang ne dépasse pas N. En effet, nier l'existence du nombre N, c'est affirmer que, quel que soit le nombre donné n, il existe sur la droite un point tel que

([1]) On trouvera dans ma Thèse une autre démonstration de ce théorème, démonstration qui donne un moyen au moins théorique de déterminer effectivement les intervalles en nombre limité dont il est question.

tous les intervalles qui le renferment ont un numéro supérieur à n. Il est clair d'ailleurs que, si l'on divise le segment de droite en deux segments égaux, l'un au moins de ces segments aura la même propriété; car, si pour chacun de ces segments il existait un nombre N, soient N' et N'' ces deux nombres, il suffirait de prendre pour N le plus grand des deux. Si nous continuons à diviser le segment en deux parties égales et si nous conservons toujours le segment pour lequel il n'existe pas de nombre N (ou l'un d'eux, s'il y en a plusieurs), nous obtiendrons des segments de plus en plus petits, renfermés les uns dans les autres et ayant la propriété suivante : *quel que soit le nombre n, chacun d'eux contient au moins un point qui n'est renfermé dans aucun intervalle de rang inférieur à n.* Mais ces segments emboîtés les uns dans les autres et dont chacun est égal à la moitié du précédent ont un point limite α; ce point α est, par hypothèse, *à l'intérieur* d'un intervalle de rang déterminé k, puisque nous avons supposé dénombrable l'ensemble de nos intervalles; *les extrémités a_k, b_k de cet intervalle ne coïncident d'ailleurs pas avec α* (à cause du sens restreint que nous attachons au mot *intérieur*); donc, cet intervalle $a_k - b_k$ comprend tout entier l'un des segments qui ont pour limite α, ce qui est absurde, puisque les points de ce segment seraient ainsi tous compris à l'intérieur de cet intervalle $a_k - b_k$ dont le rang est un nombre fixe. L'existence du nombre N est donc établie.

Mais il est évident que si des intervalles, en nombre limité N, sont tels que tous les points d'un segment leur sont intérieurs, la somme des longueurs des intervalles est supérieure à la longueur du segment. C'est ce qui n'est pas possible, si les N intervalles sont choisis parmi une infinité d'intervalles, dont la somme *totale* est inférieure à la longueur du segment.

Nous pouvons donc affirmer que l'hypothèse

$$s' < 1;$$

ou, ce qui revient au même, l'hypothèse

s [illegible] 1

a pour conséquence l'existence certaine de l'ensemble A, c'est-à-dire l'existence de points n'appartenant pas aux intervalles

donnés (sans qu'il soit d'ailleurs maintenant nécessaire de distinguer si l'on exclut ou non les extrémités).

Nous pouvons ajouter que l'ensemble A n'est pas dénombrable, car s'il était dénombrable nous pourrions, désignant ses points par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$, entourer le point α_n d'un intervalle d'étendue égale à $\frac{\varepsilon}{2^n}$, et joindre ces intervalles aux intervalles donnés; la somme s deviendrait

$$s_1 = s + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \ldots + \frac{\varepsilon}{2^n} + \ldots = s + \varepsilon,$$

et il est clair que, si l'on a

$$s < 1,$$

on peut choisir ε de telle manière que l'on ait aussi

$$s_1 < 1.$$

Par conséquent, il existerait des points n'appartenant pas aux intervalles $a_n b_n$ et ne coïncidant certainement avec aucun des points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$. Il est donc impossible que cette suite dénombrable renferme tous les points de A; donc A n'est pas dénombrable.

Nous avons insisté sur cette démonstration parce qu'elle nous a paru de nature à éclairer un peu la conception que chacun peut essayer de se faire du *continu*. Après avoir réfléchi à ce fait, que *l'on peut enlever d'une droite tous les points compris dans chacun des intervalles*

$$\frac{p}{q} - \frac{1}{q^3}, \qquad \frac{p}{q} + \frac{1}{q^3},$$

et qu'il reste encore des points, en infinité non dénombrable, on sera moins disposé à croire que l'on sait ce que c'est que le continu et à raisonner sur lui comme sur une notion intuitive et parfaitement claire.

Voici un autre exemple, dans lequel on serait aisément amené à une conclusion inexacte.

Considérons les intervalles

$$\frac{p}{q} - \frac{\varepsilon}{q^3}, \qquad \frac{p}{q} + \frac{\varepsilon}{q^3} \qquad \begin{pmatrix} q = 1, 2, 3, \ldots, \infty \\ p = 1, 2, \ldots, q-1 \end{pmatrix}.$$

Leur étendue totale est, puisqu'il y en a $q - 1$ correspondant à un même dénominateur q,

$$2\varepsilon \sum_{1}^{\infty} \frac{q-1}{q^3} = 2\varepsilon \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{q^2} - \frac{1}{q^3} \right) = \varepsilon M,$$

en désignant par M un nombre aisé à calculer. D'ailleurs, si l'on tient à ne pas compter plusieurs fois leurs parties communes, on aura des intervalles, toujours en infinité dénombrable, et dont l'étendue totale sera inférieure à εM; mais ce point a peu d'importance.

Donnons à ε la valeur $\frac{1}{n}$, n étant un nombre entier; désignons par E_n l'ensemble formé de tous les points intérieurs aux intervalles correspondants, et considérons la suite des ensembles

$$(E) \qquad E_1, \quad E_2, \quad \ldots, \quad E_n, \quad \ldots;$$

il est clair que chacun d'eux renferme tous les points contenus dans les suivants; l'intervalle E_n est d'ailleurs formé de tous les points compris à l'intérieur d'intervalles dont la longueur totale est inférieure à $\frac{M}{n}$.

Ces préliminaires terminés, nous allons porter notre attention sur l'ensemble E formé des points qui appartiennent à *tous les* E_n; cet ensemble E comprend assurément tous les points $\frac{p}{q}$; mais il n'est pas évident *a priori* qu'il renferme d'autres points. Cet ensemble E a d'ailleurs la propriété remarquable que l'on peut enfermer ses points en une série d'intervalles dont la somme est aussi petite que l'on veut; car tous les points de E sont des points de E_n et, par suite, sont compris dans des intervalles d'une longueur totale inférieure à $\frac{M}{n}$. *Nous allons montrer que* E *a la puissance du continu.*

Il suffit [1] pour cela de faire voir que l'ensemble des nombres transcendants ξ étudiés page 28, appartient à l'ensemble E; c'est-à-dire de montrer que chacun de ces nombres ξ appartient à

[1] *Voir* la Note I.

l'un quelconque des ensembles E_n. Or chacun de ces nombres ξ est tel, qu'il existe une infinité de valeurs de p et de q vérifiant l'inégalité

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^4}.$$

Puisqu'il y a une infinité de telles valeurs de q, nous pouvons supposer $q > n$ et nous aurons

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{nq^3},$$

ce qui prouve que ξ appartient à l'ensemble E_n.

Nous sommes maintenant à même de comprendre une notion qui nous sera très utile, la notion d'ensemble mesurable (¹).

Les ensembles mesurables.

Tous les ensembles que nous considérerons seront formés de points compris entre 0 et 1. Lorsqu'un ensemble sera formé de tous les points compris dans une infinité dénombrable d'intervalles n'empiétant pas les uns sur les autres et ayant une longueur totale s, nous dirons que l'ensemble *a pour mesure s*. Lorsque deux ensembles n'ont pas de points communs, et que leurs mesures sont s et s', l'ensemble obtenu en les réunissant, c'est-à-dire leur somme, a pour mesure $s + s'$. D'ailleurs, il importe peu dans la définition de la mesure d'un ensemble, ou dans celle de la somme de deux ensembles, que l'on néglige, ou que l'on tienne tel compte que l'on veut des extrémités des intervalles, en infinité dénombrable.

Plus généralement, si l'on a une infinité dénombrable d'ensembles n'ayant deux à deux aucun point commun et ayant respectivement pour mesures $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$, leur somme (ou

(¹) On comparera avec fruit les définitions que nous allons donner avec les définitions plus générales que donne M. Jordan dans son *Cours d'Analyse*. Le problème que nous étudions ici est d'ailleurs tout différent de celui qu'a résolu M. Jordan.

ensemble formé par leur réunion) a pour mesure

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_n + \ldots.$$

Tout cela est une conséquence de la définition de la mesure. Voici maintenant des définitions nouvelles : si un ensemble E a pour mesure s, et contient tous les points d'un ensemble E' dont la mesure est s', *l'ensemble* E — E', *formé des points de* E *qui n'appartiennent pas à* E', *sera dit avoir pour mesure* $s - s'$; de plus, si un ensemble est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles sans partie commune, sa mesure sera la somme des mesures de ses parties et enfin les ensembles E et E' ayant, en vertu de ces définitions, s et s' comme mesures, et E renfermant tous les points de E', l'ensemble E — E' aura pour mesure $s - s'$.

Le théorème fondamental démontré pages 41-43 nous assure que ces définitions ne seront jamais contradictoires entre elles ([1]); nous sommes donc libres de les adopter; nous sommes d'ailleurs assurés aussi que la mesure d'un ensemble ne sera jamais une quantité négative; mais un ensemble peut avoir pour mesure *zéro* et avoir la puissance du continu. Tel est l'ensemble E considéré tantôt. Si nous reprenons les notations de la page 45 et si nous désignons par α_n la mesure de E_n $\left(\alpha_n < \frac{M}{n}\right)$, l'ensemble $E_n - E_{n+1}$ aura pour mesure $\alpha_n - \alpha_{n+1}$ (nous savons que E_n renferme tous les points de E_{n+1}). L'ensemble A des points qui n'appartiennent pas à E_n a pour mesure $1 - \alpha_n$ (c'est la différence de l'ensemble de tous les points du segment 0-1 et de E_n). L'ensemble des points qui n'appartiennent pas à E peut être regardé comme formé en ajoutant à A les ensembles $E_n - E_{n+1}$, $E_{n+1} - E_{n+2}$, ...; sa mesure est donc

$$1 - \alpha_n + (\alpha_n - \alpha_{n+1}) + (\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2}) + \ldots = 1$$

puisque α_m tend vers zéro pour m infini. Donc, l'ensemble E obtenu en retranchant cet ensemble de l'ensemble de tous les points 0-1, a pour mesure *zéro*.

Ainsi un ensemble qui a pour mesure zéro peut être non dénom-

---

([1]) Il est du moins aisé d'obtenir ce résultat par des procédés tout à fait analogues à ceux que l'on a employés pour établir ce théorème.

brable; mais *tout ensemble dénombrable a pour mesure zéro;* c'est une conséquence aisée de ce qui précède.

Les ensembles dont on peut définir la mesure en vertu des définitions précédentes seront dits par nous ensembles mesurables, sans que nous entendions impliquer par là qu'il n'est pas possible de donner une définition de la mesure d'autres ensembles; mais une telle définition nous serait inutile; elle pourrait même nous gêner, si elle ne laissait pas à la *mesure* les propriétés fondamentales que nous lui avons attribuées dans les définitions que nous avons données (1).

Ces propriétés essentielles, que nous résumons ici parce qu'elles nous seront utiles, sont les suivantes : La mesure de la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles est égale à la somme de leurs mesures; la mesure de la différence de deux ensembles est égale à la différence de leurs mesures (2); *la mesure n'est jamais négative; tout ensemble dont la mesure n'est pas nulle n'est pas dénombrable.* C'est surtout de cette dernière propriété que nous ferons usage. Il est d'ailleurs expressément entendu que nous ne parlerons de mesure qu'à propos des ensembles que nous avons appelés *mesurables*.

Cependant, si un ensemble E contient tous les éléments d'un ensemble mesurable E_1, de mesure α, nous pourrons dire que la mesure de E est supérieure à α, sans nous inquiéter si E est mesurable ou non. Inversement, si E_1 contient tous les éléments de E, nous dirons que la mesure de E est inférieure à α. Les mots *supérieure* et *inférieure* n'excluent d'ailleurs pas l'égalité.

---

(1) Le procédé que nous avons employé revient en réalité à ceci : nous avons reconnu qu'une définition de la mesure ne pouvait être utile que si elle avait certaines propriétés fondamentales : nous avons posé *a priori* ces propriétés et ce sont elles qui nous ont servi à définir la classe d'ensembles que nous regardons comme mesurables. Cette manière de procéder présente de grandes analogies avec les méthodes introduites par M. J. Drach, en Algèbre et dans la théorie des équations différentielles (*voir*, par exemple, l'Ouvrage cité (p.23) et *Comptes rendus*, janvier 1895). Dans tous les cas, elle procède de la même idée fondamentale : définir les éléments nouveaux que l'on introduit, à l'aide de leurs propriétés *essentielles*, c'est-à-dire de celles qui sont strictement indispensables pour les raisonnements qui doivent suivre.

(2) Bien entendu quand on parle de la somme de plusieurs ensembles, on suppose qu'ils n'ont, deux à deux, aucun élément commun et, quand on parle de leur différence, on suppose que l'un d'eux renferme tous les éléments de l'autre.

Il est aisé de voir que les propriétés essentielles s'étendent, avec des modifications convenables, à ces nouvelles définitions : en quelque sorte, un calcul d'égalités se trouve remplacé par un calcul d'inégalités qui peut parfois rendre les mêmes services.

Nous allons démontrer, en terminant, une proposition importante, qui montrera la liaison intime entre les notions diverses introduites dans ce Chapitre : *tout ensemble parfait* [1] *limité* [2] *est mesurable*.

Soit en effet A un ensemble parfait dont tous les points sont dans l'intervalle 0-1 et soit α un point de cet intervalle, n'appartenant pas à A ; je dis qu'il existe un intervalle ab comprenant α et ne renfermant pas de point de A, a et b étant d'ailleurs des points de A. (L'un des points a ou b pourrait ne pas appartenir à A ; il coïnciderait alors avec le point 0 ou le point 1). En effet, A étant parfait, α n'appartient pas à A'; il existe donc un nombre ε tel qu'il n'y ait pas de point de A dans l'intervalle α, $\alpha + \varepsilon$, ε étant positif. D'autre part, en excluant le cas où il n'y aurait pas de point de A dans l'intervalle α-1, il existe un nombre ε' tel qu'il y ait au moins un point de A dans l'intervalle α, $\alpha + \varepsilon'$. Il est manifeste que tout nombre positif η, ou bien a la même propriété que ε, ou bien a la même propriété que ε' et l'on voit aisément qu'il existe un nombre b tel que, si $\eta < b$, il n'y a pas de point de A dans l'intervalle α, $\alpha + \eta$, tandis qu'il y en a si $\eta > b$. Or, il est aisé de voir que le point b, ou bien appartient à A, ou bien [3] appartient à A'; or, A est parfait; donc, dans tous les cas, b appartient à A. On démontrerait de même l'existence d'un point a en prenant ε et η négatifs; l'intervalle ab est l'intervalle cherché.

Ainsi, A étant un ensemble parfait, tout point α qui n'appartient pas à A se trouve dans un intervalle ab ne renfermant d'autre point de A que ses extrémités. Si nous considérons main-

---

[1] Le mot *parfait* peut être pris ici dans le sens large de M. Jordan; le résultat serait vrai, *a fortiori*, s'il avait le sens que lui donne M. Cantor.

[2] On dit qu'un ensemble est limité lorsque la distance de deux quelconques de ses points est inférieure à un nombre fixe.

[3] Car, si le point b n'appartient pas à A, il y a des points de A distincts de b, dans l'intervalle b, $b + h$, quelque petit que soit le nombre positif h; donc b appartient à A'.

tenant un autre point α', ne faisant pas partie de A et non situé dans ab, nous aurons un intervalle analogue $a'b'$, etc. D'ailleurs, l'ensemble des intervalles que l'on peut ainsi définir est certainement dénombrable, puisque la somme de leurs longueurs est au plus égale à l'unité. L'ensemble A s'obtient donc en retranchant de l'ensemble 0-1 une infinité dénombrable d'ensembles mesurables; il est donc mesurable ([1]).

Cette démonstration nous fait en même temps connaître le moyen le plus général de construction d'un ensemble parfait situé sur le segment 0, 1. Pour se donner un tel ensemble, il suffit de se donner une infinité dénombrable d'intervalles $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, ..., $a_n b_n$, ..., assujettis d'ailleurs à certaines restrictions. On en conclut aisément que l'ensemble de tous ces ensembles parfaits à la puissance du continu. Nous verrons que, d'autre part, l'ensemble de tous les ensembles de points situés sur le segment 0, 1, a une puissance plus élevée que celle du continu ([2]). Cette remarque suffit à montrer quelle restriction considérable on apporte à la notion d'ensemble, lorsqu'on assujettit un ensemble à être *parfait* et, par suite, combien il est naturel que l'on puisse être conduit ainsi à des résultats plus simples.

([1]) Nous avons eu d'ailleurs un exemple d'un ensemble mesurable non parfait; car il était dense dans tout intervalle.

([2]) *Voir* Note I, pages 109-110.



CHAPITRE IV.

LE PROLONGEMENT ANALYTIQUE.

Les Chapitres précédents ont été surtout consacrés à la théorie des ensembles; ceux qui suivent contiendront les applications de cette théorie à la théorie des fonctions.

La définition du prolongement analytique.

La notion de prolongement analytique est devenue trop classique, pour qu'il soit nécessaire d'en exposer en détail les principes; nous allons nous borner à rappeler sans démonstration les résultats essentiels sur lesquels elle est fondée. Nous désignerons, suivant un usage assez répandu, par $\mathfrak{P}(x-a)$ une série ordonnée suivant les puissances positives de $x-a$ et convergente dans un certain cercle, dont le rayon est différent de zéro, et dont le centre est le point a.

Cela posé, la première proposition fondamentale est la suivante : *Étant données deux séries* $\mathfrak{P}(x-a)$ *et* $\mathfrak{P}(x-b)$, *si leurs cercles de convergence ont une partie commune et si les deux séries ont même valeur, ainsi que toutes leurs dérivées en un point* INTÉRIEUR *à cette partie commune, elles ont même somme en tous les points où elles sont toutes deux convergentes.* Dès lors, chacune des deux séries est dite un *prolongement analytique* [1] *immédiat* de l'autre. En pratique, pour obtenir un prolongement analytique d'une série donnée $\mathfrak{P}(x-a)$, on est amené à prendre un point b, *intérieur* au cercle de convergence de $\mathfrak{P}(x-a)$ et à développer $\mathfrak{P}(x-a)$ suivant les puis-

[1] Il est à peine besoin de remarquer que, lorsqu'on donne $\mathfrak{P}(x-a)$ et b, $\mathfrak{P}(x-b)$, s'il existe, est déterminé d'une manière unique.

sances positives de $x - b$, par la formule de Taylor; mais il n'y a aucun inconvénient à employer l'expression *prolongement analytique immédiat* dans le sens un peu plus large que nous lui donnons; seulement, étant donnée une série $\mathfrak{P}(x-a)$, on n'a pas de procédé de calcul direct pour reconnaître s'il existe une série $\mathfrak{P}(x-b)$, ayant les propriétés voulues, lorsque b est extérieur au cercle de convergence de $\mathfrak{P}(x-a)$.

Voici maintenant la deuxième proposition fondamentale : *Si l'on a plusieurs séries* $\mathfrak{P}(x-a)$, $\mathfrak{P}(x-b)$, $\mathfrak{P}(x-c)$, ..., $\mathfrak{P}(x-l)$, *telles que leurs cercles de convergence recouvrent complètement une aire* S *à contour simple, et cela de telle manière que tout point de* S *soit* INTÉRIEUR *à l'un au moins des cercles; si, de plus, on peut ranger ces séries en une suite*

$$\mathfrak{P}(x-a),\quad \mathfrak{P}(x-b),\quad \ldots,\quad \mathfrak{P}(x-l),$$

les comprenant toutes, et telle que deux consécutives soient toujours le prolongement analytique immédiat l'une de l'autre, on pourra affirmer que, dans le cas où les cercles de convergence de deux séries non consécutives QUELCONQUES *se trouvent avoir une partie commune, ces deux séries sont le prolongement analytique immédiat l'une de l'autre.*

Dès lors, l'ensemble des séries considérées définit une fonction analytique uniforme dans S; chacune de ces séries est dite, d'après Weierstrass, un *élément* de cette fonction analytique.

Considérons maintenant une courbe fermée C sans point double; soient $a, b, c, \ldots, l$ des points de C et $\mathfrak{P}(x-a)$, $\mathfrak{P}(x-b)$, ..., $\mathfrak{P}(x-l)$ une suite de séries dont chacune est un prolongement analytique immédiat de la précédente; on suppose que, en parcourant la courbe dans un sens déterminé, on rencontre successivement les points a, b, c, ..., l. Supposons maintenant que les cercles de convergence de $\mathfrak{P}(x-l)$ et $\mathfrak{P}(x-a)$ aient une partie commune et que, d'autre part, tout point de la courbe soit intérieur à l'un au moins des cercles de convergence. L'ensemble de ces cercles recouvre ainsi une sorte de couronne à laquelle la courbe est intérieure.

Cela posé, deux cas généraux pourront se présenter :

1° La série $\mathfrak{P}(x-a)$ est un prolongement immédiat de $\mathfrak{P}(x-l)$; nos séries définissent alors une fonction *uniforme dans la cou-*

ronne, mais non nécessairement ([1]) uniforme à l'intérieur de C;

2° La série $\mathfrak{P}(x-a)$ n'est pas un prolongement analytique de $\mathfrak{P}(x-l)$; alors la fonction n'est pas uniforme dans la couronne C et l'on pourra, en général, tourner indéfiniment dans le même sens, en suivant C, sans retrouver une série qui soit le prolongement analytique immédiat de $\mathfrak{P}(x-a)$. Si cependant, après avoir décrit m fois le contour C, on trouve une telle série, la fonction est dite *algébroïde* à m déterminations dans la couronne; elle n'est d'ailleurs pas nécessairement ([2]) algébroïde à l'intérieur de C.

Donnons-nous maintenant, *a priori*, une série $\mathfrak{P}(x-a)$; si elle a des prolongements analytiques immédiats, nous les obtiendrons certainement, en prenant divers points à l'intérieur de son cercle de convergence et en formant le développement de Taylor correspondant; nous procéderons de même avec ces nouvelles séries et, en continuant indéfiniment, nous obtiendrons tous les éléments de fonction analytique que l'on peut déduire de l'élément donné et qui constituent avec lui une *fonction analytique*. Telle est la définition la plus générale donnée par Weierstrass de la fonction analytique. Nous y reviendrons plus loin (Chap. VI) pour la discuter et tenter de la généraliser; nous allons nous contenter ici d'en étudier avec quelque détail certaines conséquences.

Un théorème de M. Poincaré.

Nous allons exposer d'abord une remarque importante qui paraît due à M. Poincaré ([3]).

Étant donné un élément $\mathfrak{P}(x-a)$ de fonction analytique, il est clair qu'il existe une infinité non dénombrable d'élé-

---

([1]) Il suffit de considérer la fonction $\sqrt{(z-\alpha)(z-\beta)}$ et un contour C entourant les deux points α et β.

([2]) Tel est le cas, par exemple, de la fonction $\sqrt{z}+\log\frac{z-\alpha}{z-\beta}$, si le contour C entoure les points α, β, o.

([3]) *Sur une propriété des fonctions analytiques* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo,* tome II). *Cf.* Volterra, *Sulle funzioni analitiche polidrome* (*Atti della Reale Accademia dei Lincei.* Serie quarta. Rendiconti, IV_2, p. 355).

ments $\mathfrak{P}(x-b)$, dont chacun est un prolongement analytique immédiat [1] de $\mathfrak{P}(x-a)$. Chacun de ces éléments $\mathfrak{P}(x-b)$ permet de définir de même une infinité non dénombrable d'éléments $\mathfrak{P}(x-c)$ et ainsi de suite. On peut donc se demander d'abord s'il est possible d'indiquer un procédé régulier pour trouver sûrement la valeur de la fonction en un point qu'il est possible d'atteindre, et ensuite, dans le cas où la fonction n'est pas uniforme, si l'on est certain d'obtenir *toutes* les valeurs de la fonction en un point, en employant une méthode régulière. Il est aisé de se rendre compte que ces questions sont intimement liées avec la suivante : quelle est la puissance de l'ensemble des valeurs que peut prendre la fonction en un point donné? Il est clair, en effet, que si cette puissance est la *première,* c'est-à-dire si cet ensemble de valeurs est dénombrable, on pourra espérer les avoir toutes au moyen d'une suite régulière d'opérations, c'est-à-dire d'opérations effectuées successivement dans un ordre déterminé et formant par suite aussi un ensemble dénombrable. Au contraire, si la puissance de cet ensemble de valeurs dépassait la première, on ne pourrait pas être certain d'obtenir l'une quelconque d'entre elles après un nombre suffisamment grand d'opérations, quelle que soit d'ailleurs la loi à laquelle on assujettisse ces opérations.

Voici la réponse donnée par M. Poincaré à ces questions : *On peut définir toute fonction analytique au moyen d'une infinité dénombrable d'éléments* $\mathfrak{P}(x-a)$; par suite, l'ensemble des valeurs qu'une telle fonction prend en un point est dénombrable, et l'on obtiendra sûrement l'une quelconque de ces valeurs par un nombre *fini* d'opérations. Il est clair, d'autre part, que si le nombre de valeurs est infini, il faudra une infinité d'opérations pour les avoir toutes; mais on est assuré que, l'ordre des opérations à faire étant fixé une fois pour toutes, chaque valeur sera obtenue par une opération de rang déterminé.

Voici la remarque très simple à l'aide de laquelle MM. Poincaré et Volterra ont obtenu ces résultats essentiels [2].

---

[1] Le seul cas d'exception est celui où la série $\mathfrak{P}(x-a)$ n'admettrait *aucun* prolongement analytique; son cercle de convergence serait une coupure.

[2] On rapprochera avec intérêt ces résultats du suivant, tout à fait analogue à celui qu'énonce M. Weierstrass dans sa lettre à M. Schwarz (*Weierstrass Werke,*

Considérons un élément $\mathfrak{P}(x-a)$ et les cercles de convergence C de tous les éléments $\mathfrak{P}(x-b)$ que l'on obtient par la formule de Taylor, en prenant pour b un point quelconque *intérieur* au cercle de convergence de $\mathfrak{P}(x-a)$. Parmi les cercles C, désignons par C' ceux dont le centre a pour coordonnées *deux nombres rationnels* : TOUT POINT INTÉRIEUR A L'UN DES CERCLES C EST INTÉRIEUR A L'UN DES CERCLES C'.

Or, nous savons que les cercles C' forment un ensemble dénombrable; soient $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ leurs centres; nous aurons une infinité dénombrable d'éléments $\mathfrak{P}(x-b_1)$, $\mathfrak{P}(x-b_2)$, ..., $\mathfrak{P}(x-b_n)$, ..., dont la considération, au point de vue de la définition de la fonction analytique, rendra *exactement* les mêmes services que l'infinité *non dénombrable* de tous les éléments $\mathfrak{P}(x-b)$. Nous pourrons, de même, à chaque élément $\mathfrak{P}(x-b_i)$, faire correspondre une infinité dénombrable d'éléments

$$\mathfrak{P}(x-c_{i1}),\quad \mathfrak{P}(x-c_{i2}),\quad \ldots,\quad \mathfrak{P}(x-c_{in}),\quad \ldots$$

et l'ensemble dénombrable des éléments

$$(\gamma)\qquad \mathfrak{P}(x-c_{ik})\qquad (i,k=1,2,\ldots,\infty)$$

rendra exactement les mêmes services que l'ensemble non dénombrable des éléments

$$(\gamma')\qquad \mathfrak{P}(x-c),$$

que l'on obtiendrait en prenant pour c un point quelconque intérieur au cercle de convergence de l'un des éléments $\mathfrak{P}(x-b)$.

En d'autres termes, tout point *intérieur* au cercle de convergence de l'un des éléments (γ) est intérieur au cercle de convergence de l'un des éléments (γ'). Si l'on continue de même, on verra que l'ensemble des éléments que l'on obtient en répétant de nouveau la même opération [c'est-à-dire en prenant tous les points à coordonnées rationnelles, intérieurs aux cercles de convergence des éléments (γ)], éléments que l'on peut désigner par

$$(\delta)\qquad \mathfrak{P}(x-d_{ikl})\qquad (i,k,l,=0,1,2,\ldots,\infty),$$

---

t. II, p. 236) : toute fonction algébrique peut être définie à l'aide d'un nombre *fini* d'éléments (en supposant que le point à l'infini est ordinaire et que $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ est la forme des éléments correspondants).

donne tous les points *intérieurs* aux cercles de convergence des éléments

$$(\delta') \qquad \mathfrak{P}(x-d),$$

que l'on obtiendrait en partant des éléments (γ') et en prenant pour d tous les points h intérieurs à leurs cercles de convergence.

On peut continuer de même et répéter cette opération une infinité dénombrable de fois; car, d'après la définition de Weierstrass, le domaine dans lequel est définie la fonction analytique s'obtient en répétant m fois l'opération qui nous a permis de passer des éléments (γ') aux éléments (δ') et en faisant croître m indéfiniment. La fonction est définie en tout point *intérieur* à l'un des cercles de convergence ainsi obtenus, et correspondant à une valeur finie de m. Or, nous savons que, si nous effectuons parallèlement l'opération qui nous a permis de déduire les éléments (δ) des éléments (γ), nous obtiendrons, après m opérations, un ensemble d'éléments qui pourra être représenté par

$$(\mu) \qquad \mathfrak{P}(x-l_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m}) \qquad (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m=1,2,3,\ldots,\infty)$$

et que le point A sera certainement intérieur à l'un des cercles de convergence de l'ensemble (μ).

Or, nous savons que l'ensemble des éléments tels que (μ), et correspondant à toutes les valeurs de m, est dénombrable, car c'est un ensemble dénombrable d'ensembles dénombrables.

Donc, *une infinité dénombrable d'opérations nous donnera la valeur de la fonction en tous les points où elle est définie d'après Weierstrass.* Par suite, si en un point elle a une infinité de valeurs, *l'ensemble de ces valeurs sera dénombrable.* C'est ce dernier résultat que se proposait d'atteindre M. Poincaré dans la Note citée plus haut.

Mais il importe essentiellement de remarquer que la démonstration de M. Poincaré s'applique seulement aux points *intérieurs* aux cercles de convergence et non aux points de la circonférence. Pour ceux-ci, le premier des résultats énoncés ne serait pas exact; quant au second, il exigerait, semble-t-il, de nouvelles recherches. Sans nous étendre beaucoup sur ce point, considérons une fonction admettant, comme ligne singulière essentielle, un arc de courbe autre qu'un cercle, et convenons d'appeler *valeur de la*

fonction en un point x_0 de l'arc la limite vers laquelle tend sa valeur lorsqu'on s'approche de ce point par un chemin quelconque, non tangent à la ligne singulière, lorsque cette limite existe. Il est clair que l'on ne pourra obtenir cette valeur par la méthode du prolongement analytique, qu'en considérant un élément $\mathfrak{P}(x-a)$, dont le cercle de convergence soit tangent à l'arc au point x_0. On voit que pour obtenir la valeur de la fonction, quand elle existe en tous les points de l'arc, il est nécessaire de considérer une infinité non dénombrable d'éléments (¹) $\mathfrak{P}(x-a)$. Cette remarque accroît encore l'importance de la proposition de MM. Poincaré et Volterra, qu'on aurait pu être tenté de considérer comme évidente.

Remarque de Weierstrass sur les séries de fonctions uniformes.

Nous allons maintenant exposer une remarque importante, due à Weierstrass, et relative aux séries dont les termes sont des fonctions uniformes; nous verrons qu'un fait remarquable, qu'il a découvert à l'aide de calculs assez compliqués, est une conséquence immédiate de l'existence de fonctions analytiques non uniformes.

Considérons un élément de fonction analytique, représentant une fonction non uniforme dans une couronne ayant une partie commune avec son cercle de convergence; ce sera, par exemple, la série suivante

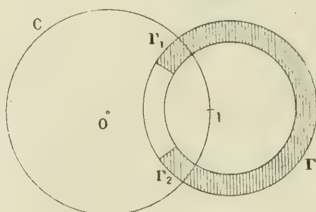
$$\mathfrak{P}(x)=\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots$$

qui représente, comme l'on sait, la fonction $\log\left(\frac{1}{1-x}\right)$, non uniforme dans une couronne entourant le point $x=1$. D'ailleurs, la série $\mathfrak{P}(x)$ représente la détermination de la fonction qui se réduit à zéro pour $x=0$.

(¹) On pourrait croire qu'il suffit de chercher la valeur de la fonction en une infinité dénombrable de points, formant un ensemble partout dense sur l'arc, par exemple aux points dont l'abscisse est rationnelle; mais la valeur de la fonction, telle que nous l'avons définie, n'est pas nécessairement une fonction continue sur l'arc et, par suite, il est absolument indispensable de la calculer en tous les points de cet arc.

Figurons une couronne Γ entourant le point $x=1$ et supprimons de cette couronne la portion qui n'est pas couverte de hachures (*fig.* 1); il est manifeste que, dans la portion restante, toute branche de la fonction $\log\frac{1}{1-x}$ est uniforme. Considérons l'une de ces branches, par exemple celle dont la partie imaginaire est égale à πi lorsque x est réel; nous aurons défini, dans le domaine D couvert de hachures, *une fonction analytique uniforme bien déterminée.* Désignons cette fonction par $\varphi(x)$. Considérons maintenant la série $\mathfrak{P}(x)$; c'est une série dont les termes sont des fonctions uniformes dans le domaine D et qui d'ailleurs n'y admettent aucun point singulier. Cette série est convergente en deux parties séparées de D, Γ_1 et Γ_2; d'ailleurs, dans chacune

Fig. 1.



d'elles, elle est uniformément convergente. Mais, ce qu'il y a de remarquable, c'est que, dans Γ_1, la somme de la série $\mathfrak{P}(x)$ est égale à $\varphi(x)$, tandis que, dans le domaine Γ_2, la somme de la série $\mathfrak{P}(x)$ est égale à $\varphi(x)-2i\pi$; c'est une conséquence immédiate des propriétés du logarithme.

En résumé, *nous avons un domaine* D *d'un seul tenant, et, dans ce domaine, une fonction analytique uniforme* $\varphi(x)$; *nous avons d'autre part une série, dont les termes sont des fonctions uniformes n'admettant aucun point singulier dans* D; *cette série converge en deux portions séparées de* D : *dans l'une de ces portions sa somme est* $\varphi(x)$; *dans l'autre, sa somme n'est pas* $\varphi(x)$.

Ce résultat, qui est une conséquence immédiate de l'*existence* de fonctions non uniformes, suffit à mettre nettement en évidence la différence essentielle qu'il y a entre une *expression analy-*

tique et une *fonction analytique;* une même expression analytique, pourvue de sens en deux régions Γ_1 et Γ_2 d'un domaine D d'un seul tenant et égale, en tous les points de Γ_1, à une fonction analytique *uniforme dans* D n'est pas nécessairement égale à la même fonction dans Γ_2. Admettons maintenant le résultat suivant, qu'on est naturellement conduit à regarder comme vraisemblable et qui est d'ailleurs aisé à démontrer (¹) : *étant donné un domaine* D, *limité par une courbe sans points singuliers, et une fonction* $\varphi(x)$, *uniforme dans* D, *on peut trouver une série* $\mathfrak{Q}(x)$ *dont les termes sont des fonctions uniformes dans* D *qui, dans tout ce domaine, converge uniformément* (²) *et a pour somme* $\varphi(x)$.

Considérons alors la série

$$\mathfrak{Q}(x) - \mathfrak{P}(x);$$

cette série est uniformément convergente dans les domaines Γ_1 et Γ_2; sa somme est zéro dans Γ_1 et $2i\pi$ dans Γ_2; d'ailleurs, Γ_1 et Γ_2 font partie d'un domaine D à contour simple *dans lequel les termes de la série sont uniformes et n'ont aucun point singulier*.

Nous voyons ainsi qu'une même série

$$\mathfrak{Q}(x) - \mathfrak{P}(x)$$

peut avoir pour somme, en deux régions d'un domaine D dans lequel ses termes sont uniformes, soit $2i\pi$, soit 0; il est clair d'ailleurs que, si $f(x)$ et $g(x)$ sont deux fonctions uniformes dans D, la série

$$f(x) + \frac{1}{2i\pi}[g(x) - f(x)][\mathfrak{Q}(x) - \mathfrak{P}(x)]$$

a pour somme $f(x)$ dans Γ_1 et $g(x)$ dans Γ_2. Par suite, *étant donnée une série*

$$\Sigma f_i(x)$$

(¹) *Voir*, par exemple, PAINLEVÉ, *Sur les lignes singulières des fonctions analytiques* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1888). Voir aussi les recherches plus récentes de MM. Hilbert et Painlevé, sur les développements en séries de polynomes.

(²) Du moins, la convergence est uniforme dans tout domaine intérieur à D.

dont les termes sont des fonctions uniformes dans un domaine D, *si cette série converge uniformément dans deux portions séparées* Γ_1 *et* Γ_2 *de* D, *on ne peut, si l'on ne fait aucune autre hypothèse, indiquer aucun lien entre les deux fonctions analytiques définies par cette série dans* Γ_1 *et* Γ_2. Ces deux fonctions n'ont aucun rapport nécessaire entre elles.

La méthode par laquelle nous avons obtenu ce résultat est *théoriquement simple,* car elle s'appuie sur des propriétés élémentaires des fonctions analytiques dont les conséquences se présentent naturellement, sans qu'il soit besoin d'aucun artifice de calcul. Mais, d'autre part, la série obtenue est d'une nature compliquée et, si nous pouvons prétendre que notre méthode a l'avantage de ne pas exiger le calcul effectif de ses termes, on peut nous répondre justement que c'est bien heureux, car nous aurions pu être gênés pour faire ce calcul : nous nous contentons de savoir qu'il est possible.

On peut arriver à des résultats analogues à l'aide de séries présentant un caractère tout différent : leur signification théorique est compliquée; le calcul de leurs termes, au contraire, est simple et, si l'on voit moins aisément les raisons théoriques générales du résultat obtenu, on aperçoit par contre, très nettement, le mécanisme simple de calcul qui fournit ce résultat. Chacun, suivant la nature de son esprit, jugera l'une de ces méthodes préférable à l'autre, c'est-à-dire de nature à mieux lui faire comprendre la *raison* du fait analytique qu'elles font connaître toutes deux. Aussi allons-nous, après avoir indiqué la première, donner un exemple de la seconde, qui est celle de Weierstrass. Nous ne choisirons pas d'ailleurs l'exemple primitif de Weierstrass, dont l'exposé exige d'assez longs calculs, mais un exemple dû à M. Jules Tannery et que Weierstrass a lui-même communiqué à l'Académie des Sciences de Berlin, le 21 février 1881. Il repose sur la remarque bien simple suivante : l'expression

$$\frac{1 + x^m}{1 - x^m}$$

a, lorsque m augmente indéfiniment, $+1$ comme limite si $|x| < 1$ et -1 comme limite si $|x| > 1$. Dès lors, si nous désignons par

$$m_1, \quad m_2, \quad \ldots, \quad m_n, \quad \ldots$$

des nombres positifs croissants et si nous considérons une série telle que la somme de ses n premiers termes soit

$$S_n = \frac{1 + x^{m_n}}{1 - x^{m_n}},$$

la somme de cette série sera $+1$ ou -1, suivant que le module de x sera inférieur ou supérieur à *un*.

Il est aisé de calculer le terme général de la série, connaissant la somme de ses n premiers termes; si, pour fixer les idées, on prend

$$m_n = 2^n,$$

on a

$$u_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1 + x^{2^n}}{1 - x^{2^n}} - \frac{1 + x^{2^{n-1}}}{1 - x^{2^{n-1}}} = \frac{1 - x^{2^n} - (1 + x^{2^{n-1}})^2}{1 - x^{2^n}} = \frac{-2x^{2^{n-1}}}{1 - x^{2^n}}$$

et l'on obtient la série

$$\frac{1+x}{1-x} + \frac{2x}{x^2-1} + \frac{2x^2}{x^4-1} + \frac{2x^4}{x^8-1} + \dots$$

dont la somme est $+1$ et -1 suivant que $|x| < 1$ ou $|x| > 1$. On déduit de ce résultat des conséquences analogues à celles que nous avons développées précédemment; remarquons cependant que les deux régions dans lesquelles la série a une somme différente sont ici séparées par une ligne (le cercle de rayon *un*) telle qu'un arc quelconque de cette ligne renferme une infinité de points, dont chacun est singulier pour une infinité de termes de la série. A cause de cette circonstance, les résultats que l'on en déduit ne sont pas identiques à ceux que nous avons énoncés tout à l'heure. Mais nous reviendrons sur ce point, dans le Chapitre VI; le Chapitre V est consacré à l'étude de la convergence de certaines séries, étude qui nous est indispensable pour notre but, mais qui ne joue qu'un rôle auxiliaire et que nous avons, par suite, mise à part, afin de pas interrompre trop souvent les raisonnements par des calculs accessoires.

CHAPITRE V.

SUR LA CONVERGENCE DE CERTAINES SÉRIES RÉELLES.

Comme nous venons de l'expliquer, les *résultats* seuls de ce Chapitre sont indispensables pour l'intelligence de ce qui va suivre; il n'est pas nécessaire d'en connaître les démonstrations. Le lecteur pour qui ces démonstrations ne présenteraient pas d'intérêt en elles-mêmes peut les omettre sans inconvénient, et lire seulement les résultats que nous résumons à la fin du Chapitre.

Les séries dont nous allons nous occuper sont de la forme suivante :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{r_n^{m_n}}, \tag{1}$$

les coefficients A_n et les exposants m_n étant des nombres réels positifs; la quantité réelle et *positive* r_n est d'ailleurs définie par l'égalité

$$r_n^2 = (x - a_n)^2 + (y - b_n)^2 + (z - c_n)^2 + \ldots,$$

les variables x, y, z, ... étant en nombre fini quelconque h. De plus, on suppose que la série

$$\Sigma A_n$$

est convergente, et enfin que les exposants m_n sont tous inférieurs à un nombre fixe m. Dès lors, il est clair que si l'on considère, dans l'espace à h dimensions, l'ensemble E des points

$$x = a_n, \qquad y = b_n, \qquad z = c_n, \qquad \ldots$$

et son ensemble dérivé E', la série (1) est certainement convergente pour tout point x, y, z, ... qui n'appartient pas à E'. Il

existe en effet alors un nombre η tel que l'on ait, pour toute valeur de x,

$$r_n > \eta;$$

on en conclut, m_n étant inférieur à m,

$$r_n^{m_n} > \eta^{m_n} > \eta^m,$$

en supposant (¹), ce qui est permis, $\eta < 1$. Les termes de la série (1) sont donc respectivement inférieurs aux termes de la série convergente à termes positifs

$$\sum \frac{A_n}{\eta^m}.$$

Le problème que nous nous proposons, c'est l'étude de la convergence de la série pour les points de E'. Nous supposerons d'abord le nombre h des variables égal à *un*, puis égal à *deux*, et l'on verra aisément qu'en se bornant à ce dernier cas on ne restreint qu'en apparence la généralité. Nous supposerons d'abord que l'on a $m_n = 1$, quel que soit n; cette restriction n'est pas non plus essentielle et a seulement pour but de simplifier les notations et le langage.

Séries à une seule variable.

Nous posons donc

$$r_n^2 = (x - a_n)^2,$$

c'est-à-dire

$$r_n = |x - a_n|,$$

et nous considérons tout d'abord la série à termes positifs

$$(2) \qquad \sum \frac{A_n}{r_n}.$$

Nous désignons par E l'ensemble des points a_n, par E' l'ensemble dérivé, et nous savons déjà que, la série

$$(3) \qquad \Sigma A_n$$

(¹) Il est clair que, si m_n n'est pas entier, $r_n^{m_n}$ est supposé essentiellement positif, et par suite a un sens bien précis.

étant supposée convergente, la série (2) est convergente lorsque x n'appartient pas à E' [1]. Il est clair que, pour étudier la convergence de la série (2) lorsque x est compris entre 0 et 1 [2], par exemple, on peut négliger tous les termes correspondant à des valeurs de a_n non comprises dans cet intervalle. Nous supposerons donc que tous les a_n sont compris entre 0 et 1, et nous étudierons la convergence de la série dans cet intervalle. Nous allons utiliser pour cela la proposition élémentaire suivante, relative aux séries à termes positifs :

Pour qu'une série soit convergente, il suffit que ses termes soient, à partir d'un certain rang, respectivement inférieurs à ceux d'une série convergente arbitraire, donnée d'avance.

De plus, si les termes de la série étudiée sont fonction d'une ou de plusieurs variables, et si, pour un ensemble de valeurs de ces variables, on peut choisir la même série de comparaison [3], *la série est uniformément convergente pour cet ensemble de valeurs.*

Enfin on peut dire, et c'est presque une tautologie, que, si une série est convergente, on peut trouver une série convergente de comparaison à l'aide de laquelle sa convergence peut être démontrée : il suffit de prendre la série dont chaque terme est le double du terme correspondant de la série donnée. Malgré son extrême banalité, cette remarque ne nous sera pas inutile.

Désignons par

$$(1) \qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

la série convergente à laquelle nous allons comparer la série proposée :

$$(2) \qquad \frac{A_1}{r_1} + \frac{A_2}{r_2} + \ldots + \frac{A_n}{r_n} + \ldots.$$

Nous écrirons que l'on a, sauf pour un nombre limité de valeurs

---

(1) Réciproquement, si les a_n sont finis, et si la série (3) est divergente, la série (2) est divergente pour toute valeur de x.

(2) Les limites étant exclues.

(3) On suppose, en outre, que le *rang* à partir duquel les termes de la série étudiée sont inférieurs à ceux de la série de comparaison peut être fixé indépendamment des valeurs particulières des variables.

de n

$$\frac{A_n}{r_n} < u_n,$$

c'est-à-dire, puisque toutes les lettres désignent des quantités positives,

$$(3) \qquad r_n > \frac{A_n}{u_n}.$$

Ces dernières inégalités ont une interprétation géométrique simple : nous avons posé

$$r_n = |x - a_n|,$$

L'inégalité (3) exprime donc simplement que le point x ne se trouve pas dans l'intervalle, d'étendue $\frac{2A_n}{u_n}$, obtenu en portant de chaque côté du point a_n une longueur égale à $\frac{A_n}{u_n}$. Nous poserons

$$\frac{A_n}{u_n} = v_n,$$

et nous considérerons l'ensemble des intervalles

$$(4) \qquad a_n - v_n, \quad a_n + v_n;$$

l'inégalité (3) devant être vérifiée, quel que soit n, sauf peut-être pour un nombre limité de valeurs, le point x ne doit appartenir qu'à un *nombre fini* [1] des intervalles (4).

Or ces intervalles forment, par leur réunion, un ensemble mesurable, dont la mesure est inférieure ou égale à

$$2\Sigma v_n;$$

nous serons donc *assurés* qu'il existe des points x n'appartenant qu'à un nombre limité de ces intervalles si cette mesure est finie [2], c'est-à-dire si la série

$$(5) \qquad \Sigma v_n$$

---

(1) Il faut évidemment de plus, comme nous l'avons déjà dit, que le point x ne coïncide pas avec un point a_n. Cependant, dans ce cas, nos raisonnements s'appliqueraient à la série dont on aura retranché le terme infini.

(2) Il est clair, en effet, que si chaque point de l'intervalle 0-1 appartient à une infinité d'intervalles, la somme de ces intervalles est infinie.

est convergente. L'étude du cas où cette série ne serait pas convergente est très délicate ; nous la laisserons de côté.

Nous supposons donc que la série (5) est convergente ; soit v sa somme. Nous allons montrer, dans cette hypothèse, que la série proposée est *uniformément convergente pour un ensemble de valeurs de x dont la mesure peut être supposée aussi voisine que l'on veut de un.* Prenons, en effet, comme série de comparaison

$$(1') \qquad \Sigma u'_n = \Sigma 2ku_n.$$

Nous avons posé

$$\frac{A_n}{u_n} = v_n$$

et

$$\Sigma v_n = v;$$

nous aurons, en prenant

$$\frac{A_n}{u'_n} = \frac{A_n}{2ku_n} = v'_n,$$

l'égalité fondamentale

$$2\Sigma v'_n = \frac{1}{k}\Sigma v_n = \frac{v}{k}.$$

Or les termes de la série proposée (2), sont certainement tous inférieurs à ceux de la série (1'), si l'on suppose que x n'est situé dans aucun des intervalles

$$(4') \qquad a_n - v'_n, \quad a_n + v'_n,$$

intervalles dont l'étendue totale est

$$2\Sigma v'_n = \frac{v}{k}.$$

L'ensemble des valeurs de x satisfaisant à cette condition a une mesure égale ou supérieure [1] à $1 - \frac{v}{k}$. Or on a pu choisir k de manière que cette expression diffère de 1 aussi peu que l'on veut. Il est clair d'ailleurs que, si l'on considère des valeurs de k de plus en plus grandes, l'ensemble des valeurs de x acquerra sans cesse

---

[1] Elle est supérieure lorsque les intervalles (4') empiètent les uns sur les autres ; leur *mesure* est alors inférieure à leur étendue totale.

de nouveaux points; quelle que soit la valeur fixe de k, la convergence est uniforme pour tous les points de l'ensemble correspondant; la convergence n'est pas uniforme lorsque l'on considère simultanément toutes les valeurs de k et toutes les valeurs de x qui leur correspondent. Tout ce que l'on peut affirmer, c'est que l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles la série n'est pas convergente a pour mesure zéro (¹) et que, par suite, l'ensemble des points de convergence est partout dense (²).

Tous ces résultats ont été obtenus en supposant la convergence de la série

$$\Sigma v_n;$$

on avait d'ailleurs posé

$$v_n = \frac{A_n}{u_n}$$

et la série

$$\Sigma u_n$$

était une série convergente quelconque.

Nous avons vu, d'ailleurs, qu'on obtenait certainement la condition nécessaire de convergence de la série proposée, en prenant pour Σu_n une série convergente *arbitraire*, c'est-à-dire en ne faisant pas d'autre hypothèse sur cette série à termes positifs, que celle de sa convergence.

Nous sommes ainsi conduits à nous poser la question suivante : étant donnée la série

$$\Sigma A_n,$$

peut-on trouver une série convergente

(6) $$\Sigma u_n$$

telle que, en posant

(7) $$v_n = \frac{A_n}{u_n},$$

(¹) Nous ne sommes d'ailleurs pas assurés que cet ensemble soit mesurable; en employant le langage expliqué p. 48, nous devrions dire que sa mesure est *inférieure ou égale à zéro;* mais la mesure n'est jamais négative.

(²) Ce dernier point, qui ne suffirait pas à entraîner le résultat d'où nous le tirons, est d'ailleurs évident. Il est clair, en effet, que le raisonnement qui nous a prouvé l'existence des points x dans l'intervalle 0-1 s'appliquerait à tout autre intervalle.

la série

$$(8) \qquad \Sigma v_n$$

soit convergente?

Il est aisé de répondre à cette question; en effet, l'inégalité

$$\sqrt{A_n} = \sqrt{u_n v_n} \leq \frac{u_n + v_n}{2}$$

nous montre que la convergence des séries (6) et (8) et la relation (7) entraînent la convergence de la série à termes positifs

$$\Sigma \sqrt{A_n}$$

Réciproquement, si cette série est convergente, il suffira de prendre

$$u_n = v_n = \sqrt{A_n},$$

pour que la relation (7) soit vérifiée et que les séries (6) et (8) convergent.

La convergence de la série

$$\Sigma \sqrt{A_n}$$

est donc la condition nécessaire et suffisante pour que nous puissions étudier la série proposée par la méthode simple de la page 66, et cette méthode nous conduit immédiatement au résultat suivant : en posant

$$\Sigma \sqrt{A_n} = v,$$

l'ensemble des points x pour lesquels la série proposée a TOUS *ses termes inférieurs à ceux de la série convergente*

$$\sum \frac{2v}{\varepsilon} \sqrt{A_n}$$

a une mesure supérieure à $1 - \varepsilon$.

Pour tous ces points, la somme de la série est manifestement inférieure à $\frac{2v^2}{\varepsilon}$.

On verrait aisément que, pour la série

$$\sum \frac{A_n}{r_n^{m_n}}, \qquad m_n \leq m,$$

il suffirait de poser

$$v_n = \frac{A_n}{u_n^m}$$

et de supposer la convergence des deux séries

$$\Sigma v_n$$

et

$$\Sigma u_n,$$

d'où l'on conclurait la convergence de la série

$$\Sigma A_n^{\frac{1}{m+1}}.$$

Cette remarque nous sera utile plus tard.

Séries à deux variables.

Nous allons maintenant étudier le cas où il y a plus d'une variable dans la série; comme nous l'avons dit, nous supposerons qu'il y en a *deux*, afin de simplifier le langage géométrique.

Nous posons donc maintenant

$$r_n^2 = (x - a_n)^2 + (y - b_n)^2,$$

$$r_n > 0$$

et nous considérons la série à termes positifs

$$\sum \frac{A_n}{r_n};$$

nous écrirons, de même que tout à l'heure,

$$\frac{A_n}{r_n} < u_n$$

et, par suite,

(1) $$r_n > v_n.$$

en posant

$$v_n = \frac{A_n}{u_n}.$$

La série

(2) $$\Sigma u_n$$

sera supposée convergente; mais l'interprétation géométrique des inégalités (1) ne sera plus la même que précédemment. Ces inégalités expriment, en effet, que le point x est extérieur aux divers cercles ayant respectivement pour centres les points a_n, b_n, et pour rayons v_n. Or l'aire de l'un de ces cercles est πv_n^2; la somme de ces aires sera donc finie si l'on suppose convergente la série

$$(3) \qquad \Sigma v_n^2.$$

Dès lors, en remplaçant u_n par ku_n, on démontrera aisément que la série proposée est uniformément convergente pour tous les points obtenus en supprimant une infinité de cercles dont l'aire totale a pu être supposée aussi petite que l'on veut; par suite, dans toute région du plan il y a des points de convergence. D'ailleurs, on voit facilement que la convergence des séries (2) et (3) exige la convergence de la série

$$\Sigma A_n^{\frac{2}{3}}$$

et que, réciproquement, si cette série est convergente, il suffit de prendre

$$u_n = A_n^{\frac{2}{3}}, \qquad v_n = A_n^{\frac{1}{3}},$$

pour pouvoir faire les raisonnements qui précèdent.

Mais nous ne nous étendrons pas sur ces résultats, qui ne nous seront pas utiles. Ils supposent d'ailleurs une étude des ensembles de points à deux dimensions, étude qui, dans ses éléments, n'est pas difficile, mais que nous n'avons pas faite. Nous aurons, au contraire, grand besoin des résultats que nous allons obtenir en étudiant la convergence de la série sur les diverses courbes que l'on peut tracer dans le plan. Nous ferons tout d'abord l'hypothèse que la série

$$\Sigma \sqrt{A_n}$$

est convergente; par suite, nous pourrons supposer que les séries

$$\Sigma u_n$$

et

$$\Sigma v_n$$

sont aussi convergentes.

Dès lors, les cercles C définis par les inégalités (1) seront tels, que *la somme de leurs diamètres pourra être supposée aussi petite que l'on veut* (en changeant u_n en ku_n).

Cela posé, considérons une droite quelconque, tracée dans le plan des deux variables réelles x, y. Nous obtiendrons des points de la droite pour lesquels la série est convergente, en supprimant les intervalles intérieurs aux cercles C; or, toute corde d'un cercle étant plus petite que le diamètre, la somme des segments de la droite qui sont intérieurs aux divers cercles C est inférieure à la somme des diamètres de ces cercles et peut, par suite, être supposée aussi petite que l'on veut. On arrive par suite sans peine, dans l'étude de la convergence de la série sur une droite arbitraire, aux résultats mêmes que nous avions obtenus dans l'étude du cas d'une seule variable; il est inutile de les répéter en détail.

D'ailleurs, ce que nous venons de dire pour une droite s'applique à toute courbe satisfaisant à la condition suivante : la somme des arcs en chaque point desquels le rayon de courbure est inférieur à ε, tend vers zéro en même temps que ε. En effet, si le rayon de courbure en tout point d'un arc est supérieur à un nombre fixe, on peut affirmer qu'un cercle suffisamment petit intercepte sur cet arc un segment au plus égal au diamètre du cercle [à des infiniment petits près d'ordre supérieur, le diamètre étant regardé comme l'infiniment petit principal (1)].

Ainsi, en excluant des courbes d'un caractère tout à fait exceptionnel, l'étude de notre série à deux variables sur une courbe quelconque conduit aux mêmes résultats que l'étude de la série à une seule variable, quand on fait la même hypothèse fondamentale : *la série*

$$\Sigma \sqrt{A_n}$$

est convergente.

On aurait pu d'ailleurs déduire ces résultats de ceux que nous avions démontrés pour le cas d'une seule variable et, si notre étude

(1) Nous supposons, bien entendu, que la courbe considérée est telle que les mots *arc, rayon de courbure,* ont un sens, et que le rayon de courbure est une fonction continue de l'arc n'admettant point une infinité de maxima et de minima. On pourrait s'affranchir d'une partie de ces restrictions, mais cela n'a pour nous aucun intérêt.

se bornait là, elle ne fournirait pas une véritable généralisation de ces premiers résultats. Nous allons obtenir, au contraire, des conséquences vraiment nouvelles et importantes pour la suite, en considérant, non plus une courbe isolée, mais une famille de courbes.

Courbes de convergence uniforme.

Proposons-nous d'abord de rechercher comment se comporte la série proposée,

$$\sum \frac{A_n}{r_n},$$

sur un ensemble de droites parallèles D; nous supposons toujours, bien entendu, que la série $\Sigma\sqrt{A_n}$ est convergente. Soit D′ une droite perpendiculaire aux droites D; chaque droite D est déterminée par le point où elle rencontre D′. Si nous considérons un des cercles C, les droites D qui le rencontrent déterminent sur D′ un segment dont la longueur est égale au diamètre du cercle considéré : c'est sa projection orthogonale sur D′. A l'ensemble des cercles C correspond ainsi un ensemble de segments, dont la somme peut être rendue aussi petite que l'on veut, puisqu'elle est égale à la somme des diamètres des cercles.

Mais, d'après la manière même dont ces segments ont été construits, il est clair que toute droite D, déterminée par un point de D′ n'appartenant à aucun de ces segments, ne rencontre aucun des cercles C. Par conséquent, en choisissant convenablement la constante k, dont nous avons déjà fait usage, nous pourrons affirmer qu'il existe sur un segment quelconque de D′ un ensemble E, dont la mesure est aussi voisine que l'on veut de la longueur totale de ce segment et qui, de plus, est tel que, sur toutes les droites D déterminées par les points de E, *la série est uniformément convergente*. Car, sur toutes ces droites, on a pour toute valeur de n,

$$\frac{A_n}{r_n} < k\sqrt{A_n},$$

k étant un nombre fixe et la série

$$\Sigma\sqrt{A_n}$$

étant convergente. D'ailleurs, si l'on pose

$$\Sigma \sqrt{A_n} = v,$$

et si l'on considère un segment de D' dont la longueur est l, on pourra affirmer que la mesure de l'ensemble E est supérieure à

$$l - \frac{2v}{k}.$$

Comme nous l'avons dit plus haut dans des circonstances analogues, on peut affirmer que la convergence a lieu pour un ensemble de mesure l, mais elle n'est pas uniforme pour cet ensemble, bien qu'elle le soit sur chaque droite D.

L'importance du résultat précédent dans les applications est due à ce fait que la série convergeant uniformément sur certaines droites D, sa somme est une fonction continue de la position du point x, y lorsque ce point décrit l'une de ces droites. On ne pouvait évidemment rien affirmer de pareil, pour une série convergeant uniformément pour les points d'un ensemble non continu.

Il est d'ailleurs aisé de généraliser le résultat précédent, en remplaçant la famille de droites parallèles D, par une famille de courbes Γ satisfaisant à des conditions très générales. Voici ces conditions restrictives dont plusieurs ne sont pas indispensables ou font double emploi, mais qui ne nous gêneront pas pour les applications. Nous supposons que l'on peut associer à la famille Γ une famille Γ' telle que, dans une région A du plan, ces deux familles de courbes déterminent un réseau de parallélogrammes infiniment petits sans *point singulier*. Nos conclusions s'appliquent alors à la région A; elles s'appliqueraient à tout le plan si tous les points a' étaient intérieurs à la région A.

Voici ce que nous entendons par un réseau sans point singulier; on a, *dans la région* A,

$$x = \varphi(u, v),$$
$$y = \psi(u, v);$$

à tout système de valeurs de u, v correspond un seul système de valeurs de x, y et réciproquement; les courbes Γ et Γ' s'obtiennent respectivement en prenant $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, et, en

posant

$$dx^2 + dy^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

les quantités essentiellement positives

$$E, \quad G, \quad EG - F^2$$

sont, dans toute la région A, comprises entre deux nombres positifs fixes.

On voit aisément alors que l'une quelconque des courbes Γ' peut jouer le même rôle que la droite D' dans la démonstration précédente : les courbes Γ qui rencontrent un cercle C interceptent sur Γ' un segment dont le rapport au diamètre du cercle est compris entre deux nombres fixes et l'on démontre ainsi aisément que les courbes Γ ont les mêmes propriétés essentielles que les droites D, au point de vue de la convergence de la série proposée.

Sans examiner tous les cas où les courbes Γ ne satisfont pas aux conditions exigées, ce qui a lieu, par exemple, si, dans l'aire A considérée, elles ont une enveloppe, nous allons étudier un cas particulier important, celui où les courbes Γ sont des droites passant par un point fixe. Il est clair d'ailleurs que, si ce point fixe n'était pas un point a', nous rentrerions dans un cas déjà étudié ; nous supposons donc que nous avons des droites Δ passant par un même point x, lequel est un point limite de l'ensemble des a. La première question qui se pose, dans l'ordre d'idées où nous sommes restés jusqu'ici, est la suivante : Y a-t-il des droites Δ sur lesquelles la série est convergente? Nous remplacerons cette question, par la suivante, plus restrictive : Y a-t-il des droites Δ qui ne rencontrent aucun des cercles C? Nous supposons d'ailleurs le système des cercles C défini de la manière la plus générale; *le rayon du cercle* C_n *est* v_n *et la série*

$$\sum \frac{A_n}{v_n}$$

est convergente; ce sont là, pour le moment, nos seules hypothèses.

Il est clair d'abord que le point x doit être extérieur à tous les cercles C; sinon, toute droite Δ rencontrerait l'un au moins de ces cercles; on a donc certainement, pour toute valeur de n,

$$r_n > v_n.$$

Menons du point x les deux tangentes au cercle C_n: l'angle de ces deux tangentes est visiblement

$$2 \arc \sin \frac{v_n}{r_n},$$

le symbole *arc sin* désignant un arc compris entre o et $\frac{\pi}{2}$; d'ailleurs, il est clair qu'une droite Δ rencontre ou ne rencontre pas le cercle C_n suivant qu'elle est intérieure ou extérieure à cet angle.

On conclut aisément de là que, pour qu'il existe des droites Δ ne rencontrant aucun des cercles C_n, il *suffit* [1] que l'on ait

$$(1) \qquad \sum_{1}^{\infty} 2 \arc \sin \frac{v_n}{r_n} < 2\pi.$$

Il est donc tout d'abord nécessaire que la série

$$\sum \frac{v_n}{r_n}$$

soit convergente et il est manifeste que cette condition suffit, car, si elle est remplie, on pourra toujours vérifier l'inégalité (1) en remplaçant v_n par kv_n et choisissant convenablement la constante k. On pourra de même démontrer qu'il existe des droites Δ dans un angle aussi petit que l'on veut, ayant son sommet au point x. Tout cela est une conséquence de la convergence de la série

$$\sum \frac{v_n}{r_n};$$

nous allons indiquer un cas très étendu dans lequel on peut trouver une infinité de points x tels que cette série soit conver-

---

[1] L'inégalité que nous écrivons exprime qu'il existe des *demi-droites*, issues du point x et ne rencontrant aucun des cercles C_n; mais leur prolongement au delà de x peut en rencontrer; pour qu'il n'y ait pas de *droites* passant par x et ne rencontrant aucun de ces cercles, il faut écrire

$$4 \sum \arc \sin \frac{v_n}{r_n} \leqq 2\pi,$$

mais ce facteur numérique est sans importance.

gente. Il suffit que la série

$$\Sigma A_n^{\frac{2}{5}}$$

soit convergente; on pourra en effet, alors, trouver une infinité de points x tels que l'on ait

$$r_n > k A_n^{\frac{1}{5}},$$

k étant une constante convenablement choisie; en prenant d'ailleurs

$$v_n = k' A_n^{\frac{3}{5}},$$

les deux séries

$$\sum \frac{A_n}{v_n}$$

et

$$\sum \frac{v_n}{r_n}$$

seront convergentes, ce qui est le résultat désiré.

Par conséquent, *lorsque la série*

$$\Sigma A_n^{\frac{2}{5}}$$

est convergente; on peut trouver, dans toute région, une infinité de points x, tels que par chacun de ces points passent une infinité de droites sur chacune desquelles la série proposée est convergente. L'ensemble de ces droites a d'ailleurs une mesure angulaire aussi voisine que l'on veut de π, si on les considère comme prolongées dans les deux sens, ou de 2π, si on les regarde comme des demi-droites.

Comme nous l'avons dit plus haut, ces résultats s'étendent sans peine à une série de la forme

$$(1) \qquad \sum \frac{A_n}{r_n^{m_n}}, \qquad m_n < m;$$

seulement, au lieu de supposer la convergence de l'une des séries

$$\Sigma A_n^{\frac{2}{3}}, \quad \Sigma A_n^{\frac{1}{2}}, \quad \Sigma A_n^{\frac{2}{5}},$$

il faut, suivant le but que l'on désire atteindre, supposer la convergence de la série

$$\Sigma A_n^{p},$$

où p est une fonction de m, aisée à déterminer; d'ailleurs, p tend vers zéro lorsque m augmente indéfiniment. Par exemple, la convergence de la série

$$\Sigma A_n^{\frac{1}{m+1}}$$

entraîne, pour la série (1), les mêmes conséquences que la convergence de la série $\Sigma A_n^{\frac{1}{2}}$ entraînait pour la série

$$\sum \frac{A_n}{r_n}.$$

Une application importante de ces remarques est la suivante : *Supposons que la série*

$$\Sigma A_n^p$$

soit convergente, quel que soit le nombre positif fixe p; c'est ce qui a lieu certainement si l'on suppose convergente la série

$$\sum \frac{1}{\left[\log \frac{1}{A_n}\right]^{\mu}},$$

qui est à termes positifs à partir d'un certain rang, puisque A_n tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment; μ est un nombre positif quelconque.

Considérons, dans cette dernière hypothèse, avec la série

$$\sum \frac{A_n}{r_n^{m_n}}, \qquad m_n < m.$$

toutes les séries que l'on en déduit en prenant les dérivées de chaque terme un nombre quelconque de fois, soit par rapport à x, soit par rapport à y. Ces dérivées s'expriment d'ailleurs linéairement au moyen des séries obtenues en dérivant chaque terme par rapport à r_n. Nous pourrons affirmer que, si la série

$$\sum \frac{1}{\left[\log \frac{1}{A_n}\right]^{\mu}}$$

est convergente, chacune de ces dérivées a toutes les propriétés de convergence que nous avons énoncées plus haut. On pourrait

même démontrer des propositions un peu plus précises, par exemple celle-ci : on peut trouver des courbes telles que, par chacun de leurs points, il passe une infinité de courbes sur lesquelles la série est convergente, etc. Mais nous préférons insister sur un fait plus important; nous venons de dire que chacune des séries dérivées est convergente sur une infinité de courbes; on ne peut pas en conclure qu'il y a des courbes sur lesquelles toutes les séries dérivées sont convergentes. On arrivera à ce résultat en prenant pour r_n les termes de la série convergente

$$\sum \frac{1}{\left[\log \frac{1}{A_n}\right]^{\mu}},$$

multipliés au besoin par une constante k, et en raisonnant comme précédemment. On trouvera ainsi, dans les mêmes conditions que plus haut (p. 73) des courbes sur lesquelles *toutes* les séries dérivées sont convergentes; d'ailleurs, sur chaque courbe la convergence est uniforme, d'où l'on conclut aisément que la dérivée de la fonction par rapport à l'arc de la courbe peut se calculer en appliquant simplement la règle de dérivation des séries.

Il suffit pour cela de se rappeler qu'une série uniformément convergente peut être intégrée terme à terme.

Nous allons, en terminant, résumer ceux des résultats acquis dans ce Chapitre dont nous aurons besoin plus loin.

Étant donnée une série de la forme

$$\varphi(x, y) = \sum \frac{A_n}{[(x-a_n)^2+(y-b_n)^2]^{m_n}},$$

on suppose que les A_n *et les* m_n *sont des nombres positifs; les* m_n *sont inférieurs à un nombre fixe et les* A_n *sont tels que la série*

$$\sum \frac{1}{\left[\log \frac{1}{A_n}\right]^{\mu}},$$

dans laquelle μ *désigne un nombre positif, est convergente* (¹).

(¹) On suppose que les A_n tendent vers zéro; cette dernière série pourrait aussi être convergente si A_n augmentait indéfiniment avec n.

En même temps que la série $\varphi(x, y)$, on considère les séries obtenues en prenant les dérivées partielles d'ordre quelconque de tous ses termes.

Cela étant, on peut trouver dans toute région du plan une infinité non dénombrable de courbes C *sur lesquelles toutes ces séries à termes positifs sont uniformément convergentes. Si l'on considère toutes les droites* D *parallèles à une direction donnée et un segment de droite σ de longueur l non parallèle à cette direction, on peut trouver sur ce segment un ensemble dont la mesure diffère aussi peu que l'on veut de l et tel que toute droite* D *passant par un point de cet ensemble ait la propriété fondamentale des courbes* C.

Il en est de même lorsque l'on considère les droites D *passant par un point* O *et que l'on remplace le segment σ par un arc de cercle de centre* O, *si l'on suppose que le point* O *ne coïncide avec aucun des points $(x = a_n, y = b_n)$, ni avec aucun point de l'ensemble dérivé de l'ensemble formé par ces points. On peut cependant, dans toute région du plan, même si tous les points de cette région appartiennent à l'ensemble dérivé dont nous venons de parler, trouver une infinité non dénombrable de points pouvant être pris pour le point* O. *On peut aussi trouver une infinité non dénombrables de tels points sur toute courbe* C.

CHAPITRE VI.

LA NOTION DE FONCTION D'UNE VARIABLE COMPLEXE.

C'est à Cauchy que revient la gloire d'avoir fondé la théorie des fonctions d'une variable complexe, en faisant connaître notamment la relation qu'il y a entre le rayon de convergence de la série de Taylor et la situation des singularités de la fonction ([1]). D'ailleurs, là comme dans plusieurs autres parties de la Science, Cauchy a laissé beaucoup à faire à ses successeurs; mais on a pu dire que chaque nouvelle découverte dans la théorie des fonctions ajoute, s'il est possible, quelque chose à l'idée que nous avons de son génie. Nous ne pouvons faire ici l'historique du développement immense qu'a pris dans la seconde moitié de ce siècle la Science nouvelle créée par Cauchy; contentons-nous de citer les noms célèbres de Puiseux, Riemann, Weierstrass. L'exposition des idées de Riemann trouverait plutôt sa place dans des leçons sur les fonctions algébriques; nous prendrons pour guide, dans ce Chapitre, les célèbres Mémoires réunis par Weierstrass sous le titre commun : *Abhandlungen aus der Functionenlehre*, en

([1]) Dans une Notice des plus intéressantes sur Weierstrass (*Acta mathematica*, t. XXI), M. Mittag-Leffler paraît affirmer que le développement des idées de Weierstrass est indépendant des travaux de Cauchy. Il nous semble qu'il importe peu que Weierstrass ait ou n'ait pas connu tel Mémoire particulier de Cauchy; mais il n'est pas douteux qu'à l'époque où Weierstrass a pu commencer à étudier les Mathématiques, la notoriété de Cauchy était trop grande, ses travaux déjà publiés trop nombreux et trop répandus, pour qu'il fût impossible de ne pas subir l'influence de sa pensée. De même, actuellement, il serait impossible de *penser* sur la théorie des fonctions en faisant abstraction complète de l'influence de Weierstrass, ne lirait-on pas une seule ligne écrite par lui. La part de Weierstrass dans le développement de la théorie est assez grande et assez belle pour qu'il soit inutile de chercher à l'augmenter en enlevant à Cauchy le mérite d'avoir été là, comme sur bien d'autres points, un initiateur et un précurseur.

tenant compte de divers travaux ultérieurs et notamment de la Thèse (1) de M. Painlevé.

Fonctions analytiques et expressions analytiques.

L'une des idées fondamentales que nous devons à Weierstrass, c'est la distinction précise entre les deux notions de *fonction analytique* et d'*expression analytique*. Nous savons déjà ce que l'on doit entendre, d'après Weierstrass, par *fonction analytique* : c'est l'ensemble de tous les *éléments* $\mathfrak{P}(x-a)$ qui se déduisent les uns des autres par la méthode du *prolongement*. Quant aux mots *expression analytique*, ils désignent, dans leur sens le plus général, toute expression dont on sait, au moyen d'opérations analytiques connues (addition, multiplication, division, intégration définie ou indéfinie, etc.) calculer la valeur quand on connaît la valeur de la variable (2). Le nombre des opérations peut d'ailleurs être fini ou infini ; un exemple de ce dernier cas nous est fourni par la considération des séries ou des produits infinis. On sait d'ailleurs que, sous des conditions très larges, une expression analytique représente dans un certain domaine une fonction analytique (3) ; d'autre part, toute fonction analytique peut être représentée par une expression analytique (par exemple par la série de Taylor, ou par l'intégrale de Cauchy), au moins dans une partie de son domaine naturel d'existence.

Néanmoins, ces deux notions se distinguent nettement, car la notion de fonction analytique est plus précise et la notion d'expression analytique plus large et en quelque mesure plus naturelle. L'importance de la notion de fonction analytique est due surtout à ce fait que deux fonctions analytiques ne peuvent coïncider le long d'un arc de courbe fini sans coïncider dans tout leur domaine

---

(1) *Sur les lignes singulières des fonctions analytiques* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1888).

(2) M. Mittag-Leffler a donné parfois, aux mots *expression analytique*, un sens plus étendu que nous n'avons pas cru devoir adopter ici.

(3) Par exemple, toute série dont les termes sont des fonctions analytiques représente une fonction analytique dans un domaine d'un seul tenant, si elle converge uniformément dans ce domaine.

d'existence ([1]); au contraire, nous avons vu qu'une expression analytique peut avoir des régions diverses de convergence et être nulle dans l'une seulement de ces régions.

On peut se borner à considérer des fonctions analytiques et les définir uniquement par des séries de Taylor; c'est le point de vue auquel se place systématiquement M. Méray; mais on ne peut se dissimuler que ce procédé qui a, il faut le reconnaître, une très grande beauté théorique, présente des inconvénients considérables. D'abord, pour définir une fonction analytique dans tout son domaine d'existence, il faut en général une infinité d'éléments $\mathfrak{P}(x-a)$ et chacune de ces séries $\mathfrak{P}(x-a)$ diverge en des points où la fonction existe. Nous avons vu, d'après M. Poincaré, que, si l'on exclut les points qui forment la frontière du domaine naturel d'existence, on peut se borner à considérer une infinité *dénombrable* d'éléments; mais, dans certains cas, la considération de la valeur de la fonction en ces points peut rendre des services et il est alors nécessaire de considérer une infinité *non dénombrable* d'éléments.

Enfin, et ce dernier inconvénient est peut-être le plus grave, le développement de Taylor $\mathfrak{P}(x-a)$ ne met nullement en évidence les propriétés essentielles de la fonction que l'on étudie, précisément parce qu'il s'applique à toutes les fonctions. La connaissance de son domaine de convergence nous fait connaître seulement la distance au point a du point singulier le plus voisin, et il est extrêmement difficile d'obtenir d'autres renseignements sur la fonction par l'étude de son développement de Taylor; c'est seulement dans des cas extrêmement particuliers ([2]) que l'on peut

([1]) Ce théorème, aisé à démontrer lorsque l'arc de courbe est *analytique*, devient beaucoup plus délicat à seulement énoncer lorsque l'arc de courbe est quelconque et que les fonctions sont définies d'un côté seulement de cet arc. Il nous semble qu'il se transforme alors en la proposition suivante due à M. Painlevé (*Thèse*, p. 28-29) : étant donnée une fonction analytique définie dans une aire A, limitée par une courbe C, si cette fonction est nulle sur un arc de C, elle est nulle dans A. Dans cet énoncé la courbe C est un ensemble de points tels que le plan se trouve divisé en deux régions A et A′ telles que l'on ne peut aller par un chemin continu, d'un point de A à un point de A′, sans que ce chemin renferme au moins un point de C; un arc de C se définit d'une manière analogue.

([2]) Citons cependant un théorème très remarquable dû à M. Hadamard (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. CXXIV, p. 1503) qui fait

tirer quelque chose de cette étude, grâce aux brillantes et profondes recherches de MM. Hadamard et Fabry.

Aussi est-il naturel de se poser la question suivante : Étant donnée une fonction analytique, peut-on trouver une expression analytique *qui converge en tout point du domaine naturel d'existence de la fonction* ([1]), et qui représente cette fonction? Il est d'abord clair que si l'expression analytique est *uniforme*, c'est-à-dire n'a qu'une valeur pour chaque valeur de la variable, elle ne peut représenter qu'une fonction uniforme; il est donc naturel de se borner, au moins dans une première étude, aux fonctions analytiques uniformes ([2]). D'ailleurs, un remarquable théorème de M. Poincaré ([3]) nous apprend que, si une variable complexe y est une fonction non uniforme de nature quelconque d'une variable complexe x, on peut exprimer x et y en fonction uniforme d'une même variable complexe t. Les fonctions non uniformes sont ainsi ramenées, à un certain point de vue, aux fonctions uniformes.

Nous énoncerons donc ainsi, en la restreignant, la question que nous posions tout à l'heure : étant donnée une fonction analytique uniforme ayant un domaine naturel d'existence D, absolument quelconque, peut-on trouver une expression analytique uniforme, qui représente cette fonction en tout point de D? Sous sa forme la plus générale, la question a été résolue pour la première fois

connaître une *relation* entre les singularités de développements de Taylor tout à fait généraux et liés simplement les uns aux autres.

([1]) *Cf.* Weierstrass (*loc. cit.*), *Werke*, tome II, page 83 ..... *ob es möglich sei, arithmetische, aus der Veränderlichen x und aus unbestimmten Constanten zusammengesetzte Ausdrücke zu bilden, welche sämmtliche Functionen einer bestimmten Klasse — und nur diese — darstellen.* On voit que la question posée par Weierstrass est à la fois moins générale et plus précise que la nôtre. Nous reviendrons sur ce point à la fin du Chapitre.

([2]) A ma connaissance, le seul résultat général sur la représentation analytique des fonctions analytiques non uniformes est dû à M. Picard (*Mémoire sur les fonctions entières* et *Traité d'Analyse*, t. II). M. Picard suppose que l'on es dans le voisinage d'un point *isolé* de non-uniformité. On pourrait évidemment étendre beaucoup ce résultat par des méthodes analogues à celles de M. Mittag-Leffler que nous citerons bientôt; mais cette extension facile serait dépourvue d'intérêt, à moins que l'on n'obtienne un résultat complètement général, ce qui paraît exiger des considérations assez délicates et en tout cas très longues.

([3]) Poincaré, *Sur un théorème de la théorie générale des fonctions* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XI).

par M. Runge (*Acta mathematica*, t. VI). Plus récemment, M. Painlevé en a repris l'étude par des méthodes nouvelles et a publié des résultats importants et très généraux (*Comptes rendus*, janvier et février 1898, *passim*); la démonstration doit en paraître dans les *Acta mathematica*.

De ces diverses recherches, nous retiendrons notamment le résultat suivant : *on peut trouver, d'une infinité de manières, une série de fractions rationnelles qui converge absolument et uniformément dans tout domaine* D' *intérieur à* D *et qui représente la fonction dans tout le domaine* D. La question que nous avions posée se trouve ainsi résolue par l'affirmative; mais les théorèmes de M. Runge et de M. Painlevé ne fournissent pas seulement la réponse à cette importante question; ils soulèvent d'autres questions non moins intéressantes. Du moment, en effet, où l'on est assuré qu'il existe, pour chaque fonction uniforme, une infinité d'expressions analytiques uniformes propres à la représenter dans tout son domaine naturel d'existence, il est naturel de chercher à choisir parmi ces expressions. Le point de vue auquel on devra se placer ressort de la citation de Weierstrass que nous avons faite tout à l'heure : l'expression que l'on choisira doit mettre en évidence le mieux possible les propriétés caractéristiques de la fonction, et en particulier ses singularités. Lorsque l'ensemble des singularités n'est pas dénombrable, on peut penser que la méthode de M. Runge ou celle de M. Painlevé les mettent en évidence autant qu'il est possible de le faire. On ne peut, en effet, songer à faire figurer explicitement dans une expression analytique une infinité non dénombrable de singularités; il semble dès lors, que tout ce qu'on peut exiger, c'est que *l'ensemble* E *des singularités de la fonction* coïncide avec l'ensemble obtenu en adjoignant à l'ensemble E *des singularités de l'expression analytique*, son ensemble dérivé E'. Mais il y a une infinité d'ensembles E ayant cette propriété (que E + E' coïncide avec E); dans bien des cas, l'un de ces ensembles E se distingue nettement de tous les autres et doit être regardé comme formé des véritables singularités de la fonction, les points de E' n'étant pas singuliers en eux-mêmes, si l'on peut ainsi dire, mais seulement comme limites de points singuliers.

Le théorème de M. Mittag-Leffler.

Le problème qui nous occupe a reçu depuis longtemps de M. Mittag-Leffler une solution moins générale que celle de M. Runge ou de M. Painlevé, lesquelles s'appliquent à *toutes* les fonctions uniformes, mais bien plus précise dans les cas, d'ailleurs très étendus, où l'on peut l'utiliser. Indiquons *l'un de ces cas :* soient E l'ensemble des points singuliers d'une fonction uniforme, E_1 l'ensemble dérivé de E, E_2 l'ensemble dérivé de E_1, ..., E_{n+1} l'ensemble dérivé de E_n, ... S'il existe un nombre p tel que l'on ait

$$E_p = 0,$$

c'est-à-dire tel que l'ensemble E_p ne renferme aucun point, la méthode de M. Mittag-Leffler [1] s'applique et l'on peut trouver une expression analytique qui représente la fonction en tous les points non singuliers *et dans laquelle chaque point singulier est mis en évidence, ainsi que la nature de la singularité de la fonction en ce point.*

Nous ne pouvons étudier en détail la méthode générale de M. Mittag-Leffler, mais, en prenant pour exemple le cas particulier traité par Weierstrass et qui fut l'origine des recherches de M. Mittag-Leffler, nous allons chercher à préciser dans quelle mesure on peut dire que la fonction uniforme est déterminée par la connaissance de ses singularités.

Considérons, avec Weierstrass, la dérivée logarithmique d'une fonction entière ; c'est une fonction uniforme, n'admettant à distance finie d'autres singularités que des pôles simples ; chaque pôle a pour résidu $+1$ si les zéros de la fonction entière considérée sont simples.

Donnons-nous une infinité de points

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

et proposons-nous de former une fonction uniforme admettant ces points comme pôles simples, le résidu de chaque pôle étant $+1$.

---

[1] *Sur la représentation analytique des fonctions monogènes uniformes d'une variable indépendante* (*Acta mathematica*, t. IV).

Nous pouvons supposer que les a_n sont rangés de manière que leurs modules n'aillent pas en décroissant; il sera d'abord nécessaire de supposer que $|a_n|$ augmente indéfiniment avec n. Cette condition étant remplie, si la série

$$\sum \frac{1}{|a_n|}$$

est convergente, on peut prendre pour la fonction cherchée, l'expression analytique

$$(1) \qquad \sum \frac{1}{z - a_n}.$$

Mais ce n'est évidemment pas là l'expression analytique la plus générale répondant à la question; il est clair que, si l'on désigne par G (z) une fonction entière arbitraire, on peut prendre aussi bien comme solution l'expression suivante

$$(2) \qquad G(z) + \sum \frac{1}{z - a_n}.$$

Ainsi, le problème que nous nous étions posé est indéterminé; mais il est aisé de le rendre déterminé en complétant son énoncé : il suffit d'exiger que l'expression analytique cherchée soit la dérivée logarithmique d'une fonction entière *de genre zéro*. Dès lors, l'expression (1) fournit la solution unique de ce nouveau problème (à une constante additive près).

Or, en disant que la fonction cherchée était la dérivée logarithmique d'une fonction de genre zéro, on a fixé en quelque mesure la manière dont elle se comporte à l'infini [1]; cela a suffi pour la déterminer, grâce à cette hypothèse préalable *la convergence de la série*

$$\sum \frac{1}{|a_n|}.$$

Si l'on n'avait d'abord supposé cette convergence, on n'aurait pu arriver aussi simplement à rendre unique la solution du problème. Pour nous rendre compte nettement de ce fait, examinons

---

[1] On peut rapprocher les considérations du texte d'une Note que j'ai publiée *sur l'interpolation* (*Comptes rendus*, mars 1897).

le cas où la série

$$\sum \frac{1}{|a_n|^{p-1}}$$

est convergente, la série

$$\sum \frac{1}{|a_n|^p}$$

étant divergente : une solution particulière du problème est alors fournie par la série

$$(3) \qquad \sum \left[\frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n} + \frac{z}{a_n^2} + \ldots + \frac{z^{p-1}}{a_n^p} \right]$$

et la solution la plus générale, par l'expression analytique

$$(4) \qquad G(z) + \sum \left[\frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n} + \ldots + \frac{z^{p-1}}{a_n^p} \right].$$

Est-il possible ici, au moyen de conditions supplémentaires, relatives à la manière dont la fonction se comporte à l'infini, de distinguer parmi l'infinité des solutions que renferme la formule (4). Il semble d'abord que la solution (3) se sépare nettement des autres; il suffit de changer z en $z - z_0$ pour constater que cette distinction est en partie artificielle. Mais, si nous assujettissons la fonction cherchée à être la dérivée logarithmique d'une fonction entière de genre p, nous pourrons affirmer que $G(z)$ est un polynome de degré au plus égal à p et l'expression (4) ne renfermera plus que $p+1$ constantes arbitraires (dont l'une peut être négligée). Il suffira donc d'avoir, sur la manière dont se comporte la fonction à l'infini, des renseignements qui permettent d'écrire p relations entre ces constantes inconnues pour que la fonction soit entièrement déterminée, à une constante additive près. On voit que cette solution est moins satisfaisante que dans le cas où le genre est égal à zéro. Mais on peut dire tout au moins que, même si l'on ne cherche pas à préciser complètement la solution, la seule hypothèse que le genre est p suffit à diminuer considérablement l'indétermination, puisqu'il ne subsiste plus que p constantes, au lieu d'une infinité.

Il n'en est plus du tout de même lorsqu'il n'existe pas de nombre p tel que la série

$$\sum \frac{1}{|a_n|^p}$$

soit convergente; on sait que dans ce cas, on est obligé, pour avoir une solution du problème, d'introduire des polynomes dont le degré dépasse toute limite; on peut, *par exemple*, considérer l'expression

$$\sum\left(\frac{1}{z-a_n}+\frac{1}{a_n}+\frac{z}{a_n^2}+\ldots+\frac{z^{n-1}}{a_n^n}\right);$$

mais il est aisé de voir qu'il n'y a plus aucune manière qui ne soit artificielle, pour distinguer cette expression de celles que l'on obtient en lui ajoutant une fonction entière arbitraire. S'il est possible de *déterminer* la solution au moyen de conditions supplémentaires, c'est bien probablement au moyen de considérations compliquées et très délicates.

Les difficultés que nous venons de signaler croîtraient beaucoup si l'on étudiait, au point de vue de la *détermination* de la fonction au moyen de ses singularités, le cas le plus général traité par M. Mittag-Leffler, dans le Mémoire que nous avons cité. Néanmoins, si l'on peut reprocher à la solution de M. Mittag-Leffler le défaut de renfermer un certain arbitraire, et cet arbitraire est peut-être impossible ou extrêmement difficile à ne pas introduire, on peut dire que les éléments *essentiels* de la représentation analytique sont déterminés par la connaissance des singularités de la fonction et ce fait suffit pour distinguer nettement cette représentation de celle de M. Runge dans laquelle les pôles des fonctions rationnelles introduites sont à peu près complètement arbitraires ([1]). Mais cette dernière a, par contre, l'avantage d'être absolument générale.

Les représentations analytiques connues.

Pour résumer les résultats acquis sur le problème de la représentation analytique des fonctions uniformes, nous pouvons dire

---

([1]) La même objection peut être faite aux divers développements de M. Painlevé, que nous avons déjà cités. Le développement sous forme de produit infini paraît être celui où les propriétés de la fonction sont le mieux mises en évidence. D'ailleurs, M. Painlevé se proposait un but tout différent du nôtre : au lieu de rechercher un développement unique, il a cherché, semble-t-il, à introduire le plus d'arbitraire possible dans sa solution, ce qui peut être très commode dans certaines applications.

que nous en connaissons deux solutions complètes : l'une est fournie par le théorème de Taylor, l'autre par le théorème de M. Runge (¹). Ces deux solutions ont une très grande importance à cause de leur généralité ; mais chacune d'elles a de graves inconvénients dont les principaux sont, pour la série de Taylor, de diverger en des régions où la fonction existe ; et, pour la représentation de M. Runge et celles de M. Painlevé, d'être possibles d'une infinité de manières.

Indépendamment de ces deux solutions générales, on connaît des représentations analytiques qui ne s'appliquent qu'à des classes particulières de fonctions, mais qui, dans les cas où l'on peut les employer, sont très utiles, parce qu'elles mettent en évidence les propriétés de la fonction. Parmi ces représentations particulières, la plus importante est celle de M. Mittag-Leffler dont nous avons déjà parlé.

Il est donc naturel de se proposer le problème suivant : rechercher pour les fonctions uniformes une représentation analytique qui mette en évidence leurs propriétés essentielles et qui, pour une fonction donnée, soit unique ; de telle sorte que les expressions analytiques, égales à zéro dans toute une région du plan, sans être identiquement nulles, soient exclues. On exige de plus que l'expression analytique converge dans une région aussi étendue que possible.

Il semble que l'on ne peut guère espérer résoudre d'un seul coup ce problème pour toutes les fonctions ; il est donc nécessaire de le restreindre en faisant des hypothèses sur les singularités des fonctions étudiées. A cause de la diversité des hypothèses possibles, il y a là un champ considérable de recherches ; c'est à force d'étudier des cas particuliers, parmi ceux qui paraissent les plus intéressants, que l'on arrivera peut-être à avoir quelques idées sur la solution du problème général.

On peut poser la question sous une forme un peu différente qui la fera peut être mieux comprendre.

(¹) Il serait très aisé de déduire de chacune de ces deux solutions des solutions de même nature et ayant respectivement les mêmes propriétés ; mais ces généralisations aisées, qui peuvent peut-être rendre des services dans la pratique, ne paraissent pas avoir d'intérêt théorique.

On connaît d'une part, des expressions analytiques qui ne peuvent représenter zéro sans être identiquement nulles et qui sont susceptibles de représenter des fonctions uniformes; mais, ou bien ces expressions analytiques ont un domaine de convergence qui diffère du domaine d'existence de la fonction (série de Taylor), ou bien elles ne peuvent représenter que des fonctions soumises à certaines conditions restrictives (théorème de M. Mittag-Leffler). On connaît, d'autre part, des expressions analytiques susceptibles de représenter des fonctions uniformes quelconques dans tout leur domaine d'existence; mais ces expressions peuvent représenter zéro sans être identiquement nulles (théorème de M. Runge).

Le but idéal à atteindre, c'est de trouver une représentation réunissant les avantages de la série de Taylor et des séries de M. Runge ou de M. Painlevé, sans avoir aucun de leurs inconvénients, et le but immédiat, c'est de trouver une telle représentation pour des classes de fonctions de plus en plus étendues.

Nous avons jusqu'ici utilisé la notion de fonction analytique sous la forme précise que lui a donnée Weierstrass; il n'est pas inutile de remarquer que la solution complète de notre problème conduirait probablement à une grande extension de cette notion. Ceci pourra être expliqué plus clairement après l'étude un peu détaillée de certaines expressions analytiques particulières.

Remarque sur les séries de fractions rationnelles.

Les expressions analytiques uniformes qui se présentent les premières sont les séries de fractions rationnelles ([1]). Soit

$$\sum \frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$$

une telle série; $P_n(z)$ et $Q_n(z)$ sont des polynomes. Nous supposons, bien entendu, qu'il existe au moins une région du plan dans

([1]) Elles comprennent comme cas particulier les séries de polynomes (et les séries de puissances); d'ailleurs, en changeant z en $\frac{1}{z-\alpha}$ une série de polynomes devient une série de fractions rationnelles; elle ne s'en distinguait que par le rôle spécial du point à l'infini.

laquelle cette série est convergente; nous supposerons de plus qu'il existe une région dans laquelle la convergence est absolue et uniforme. Cela étant, deux cas sont à distinguer : la série peut rester, ou ne pas rester, absolument et uniformément convergente lorsqu'on décompose les fractions rationnelles en éléments simples. Nous exclurons le dernier cas : indiquons brièvement pour quelles raisons. Soit

$$\sum \frac{A_n}{(z - a_n)^{m_n}}$$

la série obtenue après la décomposition en éléments simples [1] : si cette série ne converge pas absolument, elle a des valeurs différentes lorsqu'on modifie l'ordre de ses termes; par suite, la fonction n'est pas déterminée par la connaissance de ses singularités (les points a_n) et de la manière dont elle se comporte en ces points (définie par les coefficients A_n et les exposants m_n). C'est là un premier motif pour ne pas considérer de telles séries. En voici un deuxième; nous serons amenés tout à l'heure à supposer que les valeurs des exposants m_n sont inférieures à un nombre fixe; sinon la série pourrait représenter zéro; il est aisé de voir que, même avec cette restriction, en supposant, par exemple, les m_n tous égaux à *un*, on aurait le même inconvénient si l'on ne suppose pas la série absolument convergente.

En effet, si l'on a une série de fractions rationnelles ayant des pôles multiples, on peut trouver une série de fractions rationnelles qui en diffère aussi peu que l'on veut (en excluant des régions aussi petites que l'on veut autour des pôles) et qui n'ait que des pôles simples. Cette remarque, que je dois à M. Painlevé, suffit pour démontrer que l'hypothèse de la convergence absolue est nécessaire si l'on veut que la série à pôles simples ne puisse pas représenter zéro. Mais nous n'insistons pas sur ces considérations, en somme accessoires, et seulement destinées à montrer que les restrictions que nous faisons ne sont pas purement arbitraires, mais découlent de la manière dont nous avons posé le problème de la représentation analytique des fonctions uniformes.

---

[1] On pourrait avoir, pour une ou plusieurs valeurs de n, $a_n = \infty$; $\frac{1}{z - a_n}$ devrait alors être remplacé par z.

Nous supposons donc que la série

$$\sum \frac{A_n}{(z - a_n)^{m_n}}$$

est absolument et uniformément convergente dans au moins une région du plan. Les points a_n, que nous appelons *les pôles de la série* ne sont pas nécessairement tous distincts; l'ordre d'un pôle a_n est le plus grand des exposants m_n qui lui correspondent. Nous exclurons le cas où cet ordre est infini; on peut, en effet, faire alors deux hypothèses très différentes. Il peut arriver, d'une part, que l'ensemble des termes qui correspondent à un même pôle a constitue une fonction entière de $\frac{1}{z - a}$; c'est ce qui a lieu dans les développements de M. Mittag-Leffler dont nous avons déjà parlé et que nous n'avons pas l'intention d'étudier ici.

Il peut arriver, d'autre part, que l'ensemble des termes qui correspondent au pôle a forme une série qui converge seulement à l'extérieur d'un certain cercle a. M. Appell a donné, dans un Mémoire déjà cité, des exemples de séries de ce genre, avec trois pôles, et représentant *zéro* dans une région du plan, et *un* dans une autre région. C'est une raison suffisante pour exclure ces séries de nos considérations.

Nous supposons donc non seulement que la série est absolument et uniformément convergente, mais encore que l'ordre de chaque pôle est fini. Là se bornent les hypothèses restrictives rendues indispensables par la nature du problème à résoudre (¹). Nous allons malheureusement être obligés de faire d'autres hypothèses, d'un caractère plus arbitraire, et justifiées seulement par le désir d'obtenir des résultats simples. Mais nous avons tenu à les distinguer nettement des précédentes (²).

(¹) On pourrait sans doute montrer aisément qu'il est nécessaire, au même point de vue, de supposer que les ordres des divers pôles sont tous inférieurs à un nombre fixe : ce n'est pas une conséquence du fait que chacun de ces ordres est fini. Mais ce point nous semble très peu important.

(²) Les restrictions que nous allons introduire ne sont évidemment pas les seules qui conduisent à des résultats simples; il est évidemment aisé d'en trouver d'autres; il semble qu'il le soit beaucoup moins de les trouver *toutes* et surtout de les étudier méthodiquement.

Étude de certaines séries de fractions simples.

Les hypothèses restrictives peuvent porter, soit sur les pôles a_n soit sur les coefficients A_n, soit enfin sur les uns et sur les autres. Nous allons ici, pour fixer les idées, ne faire *aucune hypothèse* sur les points a_n; leur distribution dans le plan pourra être absolument quelconque [1]; mais nous serons amenés à imposer des restrictions considérables aux exposants m_n et aux coefficients A_n. On pourrait, au contraire, en faisant certaines restrictions sur la distribution des a_n, obtenir des résultats [2] avec moins de restrictions sur les A_n et les m_n. Mais notre but ici est moins d'atteindre une grande généralité que de montrer comment on peut obtenir des résultats précis avec des hypothèses, en somme assez larges. *Nous supposerons tous les exposants m_n égaux à l'unité;* nous considérons donc la série

$$\sum \frac{A_n}{z-a_n},$$

et nous supposons, en outre, que l'on a [3]

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{|A_n|} = 0.$$

---

(1) On suppose cependant qu'il existe des aires ne renfermant aucun point a_n; sinon il ne pourrait pas exister des aires *en tous les points* desquelles la série soit convergente.

(2) *Voir*, par exemple, E. Borel, *Sur quelques points de la théorie des fonctions*, première Partie (*Annales de l'École Normale*, 1895).

(3) Cette hypothèse est identique à la suivante; la série

$$\Sigma A_n Z^n$$

a un rayon de convergence infini; c'est une fonction entière de Z. On peut remarquer que nous avons été amenés, par la considération de résultats de M. Appell, à faire une hypothèse analogue à propos des séries de la forme

$$(1) \qquad \sum\left(\frac{A_n}{(z-a)^n} + \frac{B_n}{(z-b)^n} + \frac{C_n}{(z-c)^n}\right);$$

si aucune des trois séries

$$\Sigma A_n Z^n, \quad \Sigma B_n Z^n, \quad \Sigma C_n Z^n$$

n'avait un rayon de convergence infini, la série (1) pourrait représenter *zéro*

Enfin, rappelons que l'ensemble des a_n est absolument quelconque, mais que cependant *il n'est pas dense dans tout le plan;* il existe, par suite, des aires ne renfermant pas de points a_n et dans chacune desquelles la série définit une fonction analytique. Mais, dans des régions de convergence séparées, les deux fonctions analytiques ainsi définies n'ont *a priori* aucune relation entre elles [1]; nous allons démontrer que si la somme de la série est identiquement nulle dans une région du plan, elle est nulle dans toute région où elle converge : ce qui est une des propriétés caractéristiques des séries de Taylor.

Pour démontrer cette proposition nous remarquerons d'abord que si l'on pose

$$z = \frac{\alpha z' + \beta}{\gamma z' + \delta} \qquad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0,$$

$$a_n = \frac{\alpha a'_n + \beta}{\gamma a'_n + \delta},$$

on a

$$z - a_n = \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(z' - a'_n)}{(\gamma a'_n + \delta)(\gamma z' + \delta)},$$

et

$$\frac{A_n}{z - a_n} = \frac{A'_n}{z' - a'_n} + B_n.$$

dans une de ses régions de convergence et *un* dans l'autre. Il est curieux que l'on soit amené à faire la même restriction sur les coefficients de la série

$$\sum \frac{A_n}{z - a_n}$$

que sur ceux de la série

$$\sum \frac{A_n}{(z - a)^n}.$$

(1) Si l'on a une région dans laquelle il n'y a pas de point a et que cette région soit limitée par une courbe fermée dont tous les points appartiennent à l'ensemble dérivé de l'ensemble des points a, on ne doit pas regarder comme évident que cette ligne est une *limite naturelle* de la fonction analytique égale à la série dans la région considérée. Ce point n'est même pas aisé à démontrer dans le cas général; [on peut consulter à ce sujet le Mémoire déjà cité en Note (p. 93)]; mais il est facile de voir que les cas dans lesquels il n'en serait pas ainsi, doivent être regardés comme exceptionnels et il me paraît même possible de démontrer que ces cas ne peuvent se présenter avec les restrictions faites ici sur les A_n. Mais l'étude détaillée de ces questions exigerait de longs développements dont ce n'est pas ici le lieu. Nous tenons surtout à faire voir que l'on peut obtenir certains résultats *sans aucune hypothèse sur les* a_n.

en posant

$$A'_n = \frac{A_n(\gamma a'_n - \delta)^2}{\alpha\delta - \beta\gamma},$$

$$B_n = A_n \frac{\gamma(\gamma a'_n - \delta)}{\alpha\delta - \beta\gamma}.$$

On peut écrire enfin

$$(1) \qquad \sum \frac{A_n}{z - a_n} = B + \sum \frac{A'_n}{z' - a'_n},$$

en posant

$$B = \Sigma B_n.$$

L'égalité (1) exprime que *la fonction considérée conserve sa forme par une transformation homographique* [1]. Par suite, s'il existe deux régions séparées dans lesquelles la série soit convergente, si l'on désigne par c et d deux points appartenant respectivement à ces régions, il suffira de poser

$$z' = \frac{z - c}{z - d},$$

pour que la série transformée en z' soit convergente dans le voisinage des points $z' = 0$ et $z' = \infty$, c'est-à-dire à l'intérieur d'un cercle de rayon assez petit et à l'extérieur d'un cercle de rayon assez grand. D'ailleurs, entre ces deux cercles, la distribution des points a'_n est quelconque. Reprenant les anciennes notations, nous considérons une série de la forme

$$B + \sum \frac{A_n}{z - a_n},$$

les points a étant tous compris à l'intérieur d'une couronne circulaire ayant pour centre le point $z = 0$. Quant aux A, nous supposons simplement pour l'instant que la série $\Sigma |A_p|$ est convergente ; nous introduirons seulement tout à l'heure les autres hypothèses que nous avons faites à leur sujet.

Nous nous proposons, étant admis que le développement en série de Taylor de la fonction proposée à l'intérieur du petit

(1) On voit aisément que les conditions de convergence supposées pour les A_n sont sûrement vérifiées pour les A'_n, si le point $z = \frac{\alpha}{\gamma}$ n'est pas un point a_n : c'est bien ce qui a lieu dans l'application que nous ferons dans un instant.

cercle de la couronne est identiquement nul ([1]), de chercher ce qu'on en peut conclure pour le développement à l'extérieur du grand cercle. Posons

$$\sum_{n+1}^{\infty} |A_p| = \varepsilon_n;$$

ε_n désigne l'erreur que l'on commet en s'arrêtant au $n^{\text{ième}}$ terme dans le calcul de la somme des modules des A.

Cela étant, nous avons, en désignant par x_n l'inverse de a_n,

$$\frac{1}{a_n - z} = \frac{x_n}{1 - x_n z} = \sum_{p=1}^{p=\infty} x_n^p z^{p-1}$$

et, par suite,

$$\sum \frac{A_n}{a_n - z} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \sum_{p=1}^{p=\infty} A_n x_n^p z^{p-1}.$$

Nous avons donc, par hypothèse ([2]), quel que soit p,

$$(1) \qquad \sum A_n x_n^p = 0 \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots).$$

Désignons par $\frac{1}{\alpha}$ et $\frac{1}{\beta}$ les rayons des deux cercles qui limitent la couronne; on a

$$\beta < |x_n| < \alpha$$

et, par suite,

$$\left| \sum_{h=n+1}^{h=\infty} A_h x_h^p \right| < \varepsilon_n \alpha^p.$$

Nous avons donc, θ_p ayant un module inférieur à l'unité,

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_n x_n = \theta_1 \alpha \varepsilon_n,$$
$$A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + \ldots + A_n x_n^2 = \theta_2 \alpha^2 \varepsilon_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_1 x_1^n + A_2 x_2^n + \ldots + A_n x_n^n = \theta_n \alpha^n \varepsilon_n.$$

Posons

$$(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) = x^n + u_1 x^{n-1} + u_2 x^{n-2} + \ldots + u_n.$$

([1]) C'est évidemment une conséquence immédiate du fait que la somme de la série est nulle dans une région intérieure au petit cercle.

([2]) Dans le cas où B n'est pas nul, la relation n'est pas vérifiée pour $p = 1$, mais on voit aisément que ce point n'a aucune importance.

Nous conclurons facilement de ce qui précède qu'en désignant par σ_n la somme $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ on a

$$\varepsilon_n [\theta_n \alpha^n + u_1 \theta_{n-1} \alpha^{n-1} + u_2 \theta_{n-2} \alpha^{n-2} \\ + u_3 \theta_{n-3} \alpha^{n-3} + \ldots + u_{n-1} \theta_1 \alpha] + u_n \sigma_n = 0.$$

Or on a visiblement

$$|u_n| > \beta^n,$$

$$|\theta_n \alpha^n + u_1 \theta_{n-1} \alpha^{n-1} + \ldots + u_{n-1} \theta_1 \alpha| < \alpha^n \\ + |u_1| \alpha^{n-1} + \ldots + |u_{n-1}| \alpha + |u_n|.$$

Or le second membre de cette inégalité est évidemment inférieur à

$$(\alpha + |x_1|)(\alpha + |x_2|) \ldots (\alpha + |x_n|) < (2\alpha)^n.$$

Nous avons donc finalement

$$|\sigma_n| < \varepsilon_n \left(\frac{2\alpha}{\beta}\right)^n.$$

Donc, si nous supposons que l'on ait

$$\text{(2)} \qquad \lim_{n=\infty} \varepsilon_n \left(\frac{2\alpha}{\beta}\right)^n = 0,$$

la série $A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots$ aura pour somme zéro. Dans ces conditions nous démontrerons absolument de même que la série

$$\frac{A_1}{x_1} + \frac{A_2}{x_2} + \ldots + \frac{A_n}{x_n} + \ldots$$

a pour somme zéro; il suffit, en effet, de poser $\frac{A_p}{x_p} = A'_p$ et de raisonner sur les A' comme nous venons de le faire sur les A, les ε seront multipliés par un facteur compris entre α et β, et la condition (2) continuera à être vérifiée. Nous démontrerons donc que, quel que soit h, on a

$$\frac{A_1}{x_1^h} + \frac{A_2}{x_2^h} + \ldots + \frac{A_n}{x_n^h} + \ldots = 0.$$

Il en résulte que le développement de la série

$$\sum \frac{A_n}{a_n - z},$$

suivant les puissances décroissantes de z, développement valable pour les points extérieurs à la couronne considérée, est identiquement nul.

Il est clair que la condition (1) est vérifiée si le rayon de convergence de la série

$$\Sigma A_n Z_n$$

est supérieur à $\frac{2\alpha}{\beta}$. Or nous avons supposé cette série convergente dans tout le plan de la variable Z. Il est alors aisé de voir que la fonction

$$\varphi(z) = B + \sum \frac{A_n}{z - a_n}$$

ne peut pas être nulle dans une portion du plan où elle est holomorphe sans être nulle dans tout le plan. En effet, soient C_1 et C_2 deux contours à l'intérieur desquels elle est holomorphe, et C' un contour assez grand pour ne renfermer à son extérieur aucun point a. Nous tracerons deux cercles concentriques, l'un extérieur à C_1, l'autre extérieur à C' et deux autres cercles concentriques, l'un intérieur à C_2, l'autre extérieur à C'. D'après ce que nous avons vu, la fonction supposée nulle à l'intérieur de C_1, par exemple, le sera à l'extérieur de C' et, par suite, à l'intérieur de C_2 ; ce qu'il fallait établir.

Propriétés essentielles des séries étudiées. — Conclusion.

Ces résultats s'étendent sans difficulté au cas où les termes de la série sont d'un même degré différent du premier; il suffit, en effet, d'une intégration ou de plusieurs intégrations successives pour rentrer dans le cas que nous venons de traiter; on voit aisément que les constantes introduites par l'intégration sont nulles, car on pourrait évidemment conclure de ce qui précède que la série $\varphi(z)$ ne peut pas être égale à un polynome en z. Cela revient, en effet, à supposer que les relations (1) ne sont vérifiées qu'à partir d'une certaine valeur de p; la démonstration en est à peine modifiée.

Nous avons tenu à donner cette démonstration parce qu'elle donne un exemple des procédés que l'on peut employer pour étu-

dier la série considérée lorsque les a sont quelconques; mais la proposition elle-même que nous avons démontrée nous paraît beaucoup moins importante que la suivante :

On peut tracer dans toutes les régions du plan une infinité non dénombrable de courbes sur lesquelles la série est absolument et uniformément convergente, ainsi que toutes ses dérivées.

Cette proposition est d'ailleurs une conséquence immédiate des théorèmes du Chapitre précédent [1]; nous renvoyons à ce Chapitre pour ce qui concerne l'*infinité* des courbes considérées.

Remarquons simplement que, sur chacune de ces courbes C, la série représente une fonction continue, admettant des dérivées de tous les ordres, qui sont représentées par les séries dérivées. Il en

---

[1] En effet, les modules des termes des diverses dérivées de la série considérée sont de la forme

$$\frac{|A_n|}{[(x-\alpha_n)^2+(y-\beta_n)^2]^{\frac{p}{2}}}$$

pour la dérivée d'ordre $p-1$, en posant $a_n=\alpha_n+i\beta_n$. D'ailleurs, l'hypothèse

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{A_n}=0$$

peut s'écrire

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{|A_n|}}=\infty,$$

et, par suite, le logarithme ayant un sens arithmétique

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n}\log\frac{1}{|A_n|}=\infty,$$

c'est-à-dire que l'on a, à partir d'une certaine valeur de n,

$$\log\frac{1}{|A_n|}>n,$$

et la série

$$\sum \frac{1}{\left[\log\frac{1}{|A_n|}\right]^2}$$

est convergente, car elle a ses termes, au moins à partir d'un certain rang, respectivement plus petits que ceux de la série convergente

$$\sum \frac{1}{n^2}.$$

résulte qu'en un point où se croisent des courbes C, en nombre fini ou infini, la dérivée de la fonction est la même, quelle que soit la courbe C sur laquelle on se déplace.

Citons une autre conséquence du fait que la série

$$\sum \frac{A_n}{z - a_n}$$

est absolument et uniformément convergente sur une courbe C.

On peut, le long de la courbe C, intégrer la série terme à terme et son intégrale est absolument et uniformément convergente et représente l'intégrale de la fonction. On en conclut le théorème suivant, qu'on peut considérer comme presque évident, mais qui ne semble pas aisé à démontrer directement : si l'ensemble des a est dense à l'intérieur d'une aire, il est impossible que, dans un espace E aussi petit que l'on veut de cette aire, les valeurs que prend la fonction sur les diverses courbes C que l'on peut tracer dans cet espace E coïncident avec les valeurs d'une fonction holomorphe sur ces mêmes courbes C. En effet, l'intégrale de la fonction le long d'un contour fermé quelconque compris à l'intérieur de cette aire serait nulle; on en conclurait que la somme des résidus A_n de la fonction relatifs aux pôles compris à l'intérieur de ce contour serait nulle. Or, on peut tracer un contour tel que C, aussi voisin que l'on veut d'un contour quelconque donné à l'avance; de ce fait et de celui que la série des modules des A est convergente, on conclut immédiatement que tous les résidus sont nuls, c'est-à-dire que la série est identiquement nulle.

Mais nous n'insistons pas sur ces propriétés que l'on pourrait multiplier; nous voulions seulement montrer comment on pouvait introduire dans le calcul des expressions analytiques dont les valeurs, en des régions diverses de convergence, soient liées simplement entre elles. Il semble dès lors, qu'on puisse songer à étendre la définition donnée par Weierstrass de la *fonction analytique* et regarder dans certains cas, comme étant *la même fonction,* des fonctions analytiques ayant des domaines d'existence séparés. Mais il est nécessaire pour cela de faire des restrictions sur la nature des expressions analytiques que l'on considère, et c'est parce qu'il n'a voulu faire aucune restriction de ce genre que Weierstrass a résolu par la négative la question qu'il avait

posée sous la forme suivante : *Es war daher der Gedanke nicht abzuweisen, ob nicht überhaupt in dem Falle, wo ein arithmetischer Ausdruck* F(x) *in verschiedenen Theilen seines Geltungsbereichs verschiedene monogene Functionen der complexen Veränderlichen x darstellt, unter diesen ein nothwendiger Zusammenhang bestehe, der bewirke, dass durch die Eigenschaften der einen auch die Eigenschaften der andern bestimmt seien. Wäre dies der Fall, so würde es daraus folgen, dass der Begriff der monogenen Function erweitert werden müsste.* (Weierstrass, *Werke,* t. II, p. 212.)

Il serait nécessaire de parler aussi d'une objection faite par M. Poincaré aux tentatives de prolongement d'une fonction au delà d'une ligne singulière fermée; nous renverrons pour ce point au Mémoire déjà cité en note (p. 93). Contentons-nous de dire que les arguments de M. Poincaré sont irréprochables, si l'on ne fait aucune restriction sur la nature des expressions analytiques que l'on considère; or nous avons insisté à diverses reprises sur la nécessité qu'il y avait, à notre point de vue, à faire de telles restrictions. Notre désaccord avec M. Poincaré n'est donc qu'apparent; il provient de ce que nous avons étudié deux problèmes, en apparence identiques, mais en réalité différents.

Il ne nous est pas possible de donner à ce Chapitre une conclusion décisive et définitive; car, à notre avis, la question qui y est examinée n'est pas entièrement résolue et appelle de nouvelles recherches. Nous serions satisfait si nous avions convaincu nos lecteurs que, ni les travaux fondamentaux de Weierstrass, ni les travaux ultérieurs de MM. Mittag-Leffler, Appell, Poincaré, Runge, Painlevé, ne résolvent entièrement la question des rapports entre la notion de fonction analytique et d'expression analytique. On peut même dire, sans exagération, que l'étude et la classification des expressions analytiques, non susceptibles de représenter zéro sans être identiquement nulles, est encore à faire à peu près entièrement.

NOTE I.

LA NOTION DES PUISSANCES.

L'égalité et l'inégalité des puissances.

Nous avons dit que deux ensembles ont *même puissance,* lorsqu'on peut établir entre leurs éléments une correspondance univoque et réciproque; mais nous nous sommes contentés de considérer, d'une part, des ensembles dénombrables ou de *première puissance,* d'autre part, des ensembles ayant la *puissance du continu;* c'est-à-dire, que nous avons toujours comparé les puissances à des puissances *données* (ou considérées comme telles). Dans l'étude sommaire que nous allons faire de la notion générale de puissance, nous procéderons de même, en ce sens que nous ne séparerons jamais la notion abstraite de puissance de la notion plus concrète d'ensemble et que nous ne chercherons pas à concevoir *la puissance en soi,* indépendamment de tout ensemble possédant cette puissance [1].

Étant donnés deux ensembles A et B, nous désignerons par A_1 une partie aliquote quelconque de A, c'est-à-dire un ensemble comprenant uniquement des éléments de A, mais ne les comprenant pas tous; de même B_1 désignera une partie aliquote quelconque de B. Cela étant, si l'on compare A et B, quatre cas sont logiquement possibles et s'excluent réciproquement.

1° *Il existe un* A_1 *ayant même puissance que* B *et il n'existe pas de* B_1 *ayant même puissance que* A.

2° *Il n'existe pas de* A_1 *ayant même puissance que* B, *et il existe un* B_1 *ayant même puissance que* A.

3° *Il existe un* A_1 *ayant même puissance que* B *et aussi un* B_1 *ayant même puissance que* A.

4° *Il n'existe, ni un* A_1 *ayant même puissance que* B, *ni un* B_1 *ayant même puissance que* A.

---

(1) D'après M. G. Cantor, la notion de puissance s'obtient en partant de l'idée d'ensemble, par une *double* abstraction : abstraction de *l'ordre* et de la *nature* des objets. Mais il ne nous semble pas que cette remarque suffise pour permettre de raisonner sur les puissances indépendamment de tout substratum.

Les deux premiers cas ne diffèrent que par l'échange de A et de B; dans le premier cas, on dit que la puissance de A est supérieure à celle de B et dans le second que la puissance de B est supérieure à celle de A. On démontre d'ailleurs très aisément [1] que si la puissance d'un ensemble C est égale ou inférieure à celle d'un ensemble B, laquelle est égale ou inférieure à celle d'un ensemble A, la puissance de C est égale ou inférieure à celle de A, l'égalité n'ayant lieu que si les puissances de A et de C sont toutes deux égales à celle de B.

D'autre part, il est clair que ces deux premiers cas non seulement sont logiquement possibles, mais sont réellement possibles; il suffit de prendre pour l'un des ensembles, un ensemble dénombrable et pour l'autre, un ensemble ayant la puissance du continu.

On peut aussi donner des exemples du troisième et du quatrième cas. Pour le troisième, il suffit de prendre pour A et B *deux ensembles infinis ayant même puissance;* nous savons, en effet (p. 13), que l'on peut, en retranchant de A, par exemple, un ensemble dénombrable, obtenir un ensemble A_1, qui est une partie aliquote de A et qui a même puissance que A, c'est-à-dire même puissance que B. On obtiendrait de même un ensemble B_1 ayant même puissance que A.

Le quatrième cas, enfin, se présente lorsqu'on a deux ensembles composés *d'un même nombre fini d'éléments.* Il est clair, en effet, qu'une partie aliquote quelconque de l'un d'eux ne saurait avoir même puissance que l'autre.

La question qui se pose maintenant est la suivante :

Lorsqu'on est dans l'un des deux derniers cas, peut-on affirmer que les deux ensembles A *et* B *ont même puissance* [2]?

Nous allons démontrer qu'il en est ainsi dans le troisième cas; mais, dans le quatrième cas nous ne savons rien. C'est une question qu'il serait très important de résoudre; car, si on la résout par l'affirmative, dans le quatrième cas comme dans le troisième, on pourra affirmer que, deux ensembles quelconques étant donnés, ou bien ils ont même puissance, ou bien la puissance de l'un est supérieure à celle de l'autre, au sens précis que nous avons donné à ces mots. Si, au contraire, ce quatrième cas se résout par la négative, il pourra exister deux ensembles A et B tels qu'il soit impossible de *comparer leurs puissances :* la puissance de A ne pourra être dite, ni égale, ni supérieure, ni inférieure à celle de B [3].

---

[1] Il suffit de se servir du procédé de *projection* que nous expliquons à la page suivante.

[2] D'ailleurs si l'on admet ce point, on prouvera aisément que, dans le troisième cas, les ensembles renferment une infinité d'éléments et dans le quatrième un nombre fini.

[3] Ces difficultés, dont j'avais vainement cherché la solution dans les publications de M. G. Cantor m'avaient, à diverses reprises, vivement préoccupé et,

Tout en souhaitant vivement que cette question importante s'éclaircisse, il nous paraît bien difficile que l'on puisse tirer une démonstration précise et rigoureuse des hypothèses *purement négatives* du quatrième cas, si on laisse à l'idée d'ensemble toute sa généralité. C'est pour cette raison que nous n'avons pas cru devoir donner de place ici aux travaux de M. G. Cantor sur la *numération* des puissances, car il nous a semblé qu'on ne pouvait actuellement bâtir une telle numération sur une base absolument sûre. Mais nous sommes loin de méconnaître l'importance de ces recherches, car, en dehors de leur intérêt philosophique et même si elles n'aboutissent pas à leur but idéal, elles peuvent rendre de très grands services. Par exemple, nous aurons à nous servir bientôt (p. 127) du théorème que nous allons maintenant démontrer : *Dans le troisième cas les puissances de* A *et de* B *sont égales.* Rappelons que les hypothèses, dans ce troisième cas, sont les suivantes :

Il existe une partie aliquote A_1, de A, qui a même puissance que B et il existe une partie aliquote B_1 de B qui a même puissance que A. Il faut prouver que A a même puissance que B.

Les ensembles B et A_1 ayant même puissance, il existe une *projection* de B sur A_1 c'est-à-dire une loi d'après laquelle les éléments de B et de A_1 se correspondent d'une manière univoque et réciproque. Il existe même une infinité de telles projections; mais nous en choisissons une bien déterminée. Il est clair que, par une telle projection, à toute partie aliquote de B correspond une partie aliquote de A_1; soit A_2 la partie aliquote de A_1 qui correspond ainsi à B_1 : A_2 a, d'après la définition même de la puissance, même puissance que B_1 et, par suite, même puissance que A. D'ailleurs A_2 *est une partie aliquote de* A_1, *qui est lui-même une partie aliquote de* A. Tout revient à dire que, A_2 *ayant même puissance que* A, A_1 *a aussi même puissance que* A (car B a même puissance que A_1).

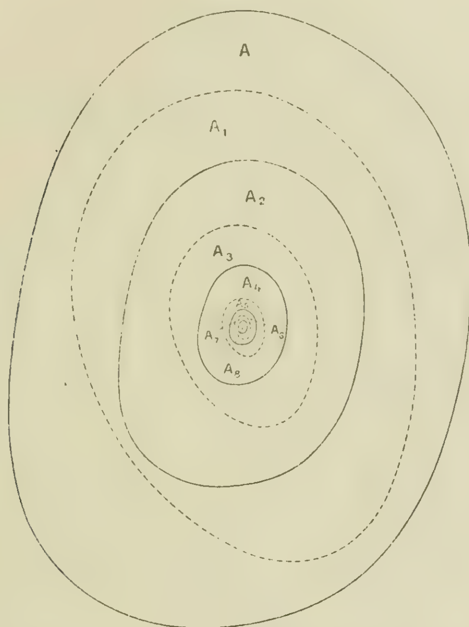
Par hypothèse A_2 a même puissance que A ; choisissons une projection déterminée de A sur A_2 ; A_1 qui est une partie aliquote de A deviendra une partie aliquote A_3 de A_2, et A_2 qui est une partie aliquote de A_1 deviendra une partie aliquote A_4 de A_3. C'est ce que nous indiquons sur

---

ayant eu l'honneur de faire la connaissance de M. G. Cantor au Congrès de Zurich (août 1897), je m'empressai de les lui soumettre. Il voulut bien m'indiquer, pour le troisième cas, le théorème que nous venons d'énoncer et dont la démonstration termine ce paragraphe; cette démonstration inédite est due à M. Félix Bernstein et a été donnée pour la première fois dans le séminaire de M. G. Cantor, à Halle. Quant au théorème lui-même, M. G. Cantor le considère comme exact depuis fort longtemps; il a bien voulu me communiquer verbalement que son sentiment est le même au sujet du quatrième cas; j'indique dans le texte les raisons qui ne me permettent pas de partager entièrement sa manière de voir sur ce dernier point. Qu'il me soit permis de remercier vivement M. G. Cantor de l'obligeance avec laquelle il m'a communiqué les renseignements qui précèdent et m'a autorisé à les publier ici.

la figure *schématique* ci-contre, où la *projection* de A sur A_2 est une transformation homothétique. D'ailleurs A_3 a même puissance que A_1 et A_4 même puissance que A_2 et que A. Si nous *projetons* A sur A_4, A_1 et A_2 seront projetés suivant A_5 et A_6; A_5 sera une partie aliquote de A_4 et aura même puissance que A_1 et A_3; A_6 sera une partie aliquote de A_5 et

Fig. 2.



aura même puissance que A_1 A_2, A_4. En continuant ainsi, on formera une suite d'ensembles

$$A, A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots,$$

tels que chacun d'eux est une partie aliquote du précédent et tels de plus que tous les ensembles d'indice pair ont même puissance que A et tous les ensembles d'indice impair même puissance que A_1.

D'ailleurs cette suite se prolonge indéfiniment, c'est-à-dire que l'ensemble A_n est défini, quel que soit l'entier n; il renferme d'ailleurs sûrement des éléments, puisqu'il a même puissance que A ou que A_1, suivant que n est pair ou impair.

Considérons maintenant (¹) l'ensemble D formé des éléments communs

(¹) En introduisant l'ensemble D, je modifie légèrement la démonstration que M. G. Cantor m'avait communiquée (*voir* Note de la p. 104), afin d'éviter l'introduction des nombres transfinis. Cette modification est d'ailleurs sans importance.

à tous les ensembles A, A_1, A_2, ..., A_n, ... Cet ensemble D peut d'ailleurs ne renfermer aucun élément. Il est clair que cet ensemble D peut s'obtenir en retranchant successivement de A les ensembles

$$A - A_1, \quad A_1 - A_2, \quad A_2 - A_3, \quad \ldots, \quad A_n - A_{n+1}, \quad \ldots.$$

Nous pouvons donc écrire

$$A = D + (A - A_1) + (A_1 - A_2) + (A_2 - A_3) + \ldots$$

et chacun des symboles entre parenthèses désigne un ensemble déterminé, puisque A_{n+1} est une partie aliquote de A_n. On peut écrire de même

$$A_1 = D + (A_1 - A_2) + (A_2 - A_3) + (A_3 - A_4) + \ldots.$$

Il est maintenant aisé de démontrer que les ensembles A et A_1 ont même puissance; il suffit de remarquer qu'on peut les regarder comme formés d'une infinité dénombrable d'ensembles ayant deux à deux même puissance. Il résulte, en effet, du mode de projection par lequel on a obtenu les ensembles A_3, A_4, ... que $A - A_1$ a même puissance que $A_2 - A_3$, que $A_4 - A_5$, que $A_6 - A_7$, ... De même, les ensembles $A_1 - A_2$, $A_3 - A_4$, $A_5 - A_6$, ... ont tous même puissance. Il suffit, dès lors, d'écrire l'expression de A_1 sous la forme

$$A_1 = D + (A_2 - A_3) + (A_1 - A_2) + (A_4 - A_5) + (A_3 - A_4) + (A_6 - A_7) + \ldots,$$

pour reconnaître que chacun des termes de cette série a même puissance que le terme de même rang de la série qui définit A.

Le théorème est donc démontré [1]. Nous en ferons surtout usage sous la forme suivante : lorsqu'une partie aliquote de A aura même puissance que B, nous dirons que *la puissance de* A *est inférieure ou égale à celle de* B *et que la puissance de* B *est supérieure ou égale à celle de* A. Dès lors, lorsque nous aurons pu démontrer que la puissance d'un ensemble A est *à la fois supérieure ou égale* et *inférieure ou égale* à

---

[1] Il importe de signaler une grave erreur qui pourrait être suggérée par la démonstration précédente. Nous avons vu que $A - A_1$ et $A_2 - A_3$ avaient même puissance, à cause de la projection au moyen de laquelle nous avions obtenu A_3; *mais ce n'est nullement une conséquence du fait que* A_2 *a même puissance que* A *et* A_3 *même puissance que* A_1. Il est aisé de s'assurer que, deux ensembles A et B ayant même puissance, et leurs parties aliquotes respectives A_1 et B_1 ayant aussi même puissance, *on n'en peut rien conclure pour* $A - A_1$ *et* $B - B_1$. Il suffit de prendre, par exemple, pour A l'ensemble des points compris entre 0 et 2, pour B l'ensemble des points compris entre 0 et 1, et pour A_1, ainsi que pour B_1, l'ensemble des points d'abscisses incommensurables compris entre 0 et 1. L'ensemble $A - A_1$ a alors la puissance du continu, tandis que l'ensemble $B - B_1$ est dénombrable. On aurait pu d'ailleurs supposer aussi A_1 et B_1 tous deux identiques à B.

celle d'un ensemble B, nous pourrons affirmer qu'*elle lui est égale*. Sous cette forme, le théorème paraît évident; mais il importe de remarquer que s'il n'avait pas été préalablement démontré il n'eût pas été légitime d'introduire ce langage.

La formation d'ensembles ayant des puissances de plus en plus grandes.

On pourrait se demander si tous les ensembles n'ont pas, ou bien la puissance des ensembles dénombrables, ou bien la puissance du continu et, s'il en était ainsi, l'utilité pratique, sinon l'intérêt théorique, des recherches sur les puissances en général serait singulièrement diminuée. Nous allons voir que l'on peut, par une méthode due à M. G. Cantor, *définir* des ensembles ayant des puissances de plus en plus grandes; nous rechercherons ensuite, à la fin de ce paragraphe, si l'on peut *concevoir* de tels ensembles.

Indiquons d'abord comment on peut définir un ensemble ayant une puissance supérieure à celle d'un ensemble donné E. Désignons par x un élément quelconque de E et par $f(x)$ une fonction de l'élément x, *ne pouvant prendre que l'une des deux valeurs* o *et* 1. Cette fonction est d'ailleurs définie d'une manière déterminée pour chaque élément de E. Je dis que l'ensemble F formé par *toutes* les fonctions telles que $f(x)$ a une puissance supérieure à la puissance de E. Bien entendu, deux fonctions $f(x)$ sont regardées comme distinctes si elles n'ont pas la même valeur pour *tous* les éléments de E.

Montrons d'abord que l'on peut trouver une partie aliquote F_1 de F ayant même puissance que E. Il suffit de faire correspondre à chaque élément x de E la fonction $f(x)$ qui prend la valeur o pour cet élément x et la valeur 1 pour tous les autres éléments de E. L'ensemble de ces fonctions $f(x)$, qui sont toutes distinctes, constitue une partie aliquote F_1 qui a même puissance que E. Donc la puissance de F est supérieure ou égale à celle de E; il nous suffit de faire voir qu'elle ne lui est pas égale, pour que nous soyons assuré qu'elle lui est supérieure. C'est là une conséquence des définitions et théorèmes du paragraphe précédent.

Si l'ensemble F a même puissance que l'ensemble E, nous pouvons désigner par $f_y(x)$ la fonction qui correspond à un élément y de E et, si y est un élément quelconque de E, le symbole $f_y(x)$ pourra représenter un élément quelconque de F. Or, nous allons faire voir qu'il existe une fonction $f(x)$ distincte de toutes les fonctions $f_y(x)$; il suffit de considérer la fonction $f(x)$ définie par les inégalités

$$f(x) \neq f_x(x)$$

dans lesquelles x est un élément quelconque de E. Ces inégalités définissent complètement la fonction $f(x)$, car sa valeur pour un élément

quelconque x de E ne pouvant être que 0 ou 1, elle est connue, si l'on sait qu'elle n'est pas égale à $f_x(x)$ qui ne peut être aussi que 0 ou 1. Or, il est clair que la fonction $f(x)$ ainsi définie n'est égale à aucune des fonctions $f_y(x)$; car, si $f_y(x)$ est l'une de ces fonctions, la fonction $f(x)$ ne prend pas la même valeur pour $x = y$, car on a

$$f(y) \neq f_y(y)$$

Donc, la puissance de F n'est pas égale à la puissance de E; donc elle lui est supérieure.

Il est aisé de voir que, si l'on prend pour ensemble E un ensemble dénombrable, l'ensemble F a la puissance du continu; car, si à chacun des nombres 0, 1, 2, ..., n, ... on fait correspondre la valeur 0, ou 1, on peut représenter cette correspondance par une fraction décimale

$$0,10111001\ldots$$

supposée écrite dans le système de numération binaire. Nos lecteurs achèveront aisément le raisonnement à l'aide des principes posés dans le Chapitre I. Ils reconnaîtront, en particulier, que le cas où, à partir d'un certain rang, tous les chiffres décimaux seraient égaux à 1, donne lieu à une difficulté aisée à écarter.

Si l'ensemble E a la puissance du continu, on peut dire que l'ensemble F est, par exemple, l'ensemble des fonctions discontinues d'une variable réelle, prenant seulement l'une des deux valeurs 0 ou 1. Cet ensemble a une puissance supérieure à celle du continu [1].

Considérons cet ensemble F et séparons toutes les fonctions qu'il renferme en deux classes, cette séparation étant d'ailleurs faite suivant un mode quelconque.

L'ensemble de ces modes de séparation a une puissance supérieure à l'ensemble F. On peut continuer ainsi indéfiniment, c'est-à-dire construire une infinité dénombrable d'ensembles ayant des puissances de plus en plus grandes. D'ailleurs, lorsqu'on a une telle infinité d'ensembles

$$E_1, \quad E_2, \quad \ldots. \quad E_n, \quad \ldots,$$

tels que la puissance de chacun est supérieure à la puissance du précédent, il est clair que l'ensemble formé par la réunion de tous leurs éléments a une puissance supérieure à celle de chacun d'eux. Cette remarque, qui est due à M. G. Cantor, montre combien est considérable la multiplicité des puissances possibles; mais nous n'insistons pas sur ce point. Nous préférons consacrer la fin de ce paragraphe à la discussion

---

(1) On verrait d'ailleurs aisément que l'on aurait un ensemble de même puissance que F, si l'on supprimait la restriction que $f(x)$ est nécessairement égal à 0 ou à 1, et que l'on considère l'ensemble des fonctions discontinues quelconques. (*Voir*, pour ce point, page 124.)

du procédé de M. G. Cantor, dans le cas le plus simple où il nous fait connaître un ensemble dont la puissance est supérieure à celle du continu : l'ensemble F des fonctions discontinues, de variable réelle, ne prenant que les valeurs 0 et 1. Cet ensemble est logiquement défini; mais je me demande si nous en avons quelque conception. Pouvons-nous, en effet, concevoir la fonction discontinue la plus générale d'une variable réelle (même en supposant que les seules valeurs de la fonction sont 0 ou 1)? Il est nécessaire, en effet, pour donner une telle fonction de donner sa valeur pour *toutes* les valeurs réelles de la variable. Or, cet ensemble de valeurs n'étant pas dénombrable, il n'est pas possible d'indiquer un procédé qui permette de les avoir toutes, c'est-à-dire d'en atteindre une quelconque au bout d'un temps limité. On voit quelle est la difficulté qui se présente ici; elle est autrement grave que la difficulté analogue dans la définition de l'incommensurable générale, pour laquelle nous renverrons à un article de M. J. Tannery déjà cité (en note au bas de la page 3). En effet, si nous ne pouvons pas définir l'incommensurable générale de la même manière qu'un ensemble dénombrable, nous pouvons, du moins, semble-t-il, concevoir comme défini un nombre incommensurable quelconque, car nous pouvons définir les n premiers chiffres d'une fraction décimale, quel que soit n, et faire croître n indéfiniment. Nous ne pouvons rien faire de pareil pour la fonction discontinue générale d'une variable réelle, car il faut donner sa valeur *pour une infinité non dénombrable de valeurs de la variable*. Nous reparlerons plus loin de cette difficulté.

La puissance des ensembles de fonctions.

Aussi nous semble-t-il difficile d'introduire la considération de telles fonctions, et, en général, de toutes les classes de fonctions dont l'ensemble a une puissance supérieure à celle du continu; car, on ne peut se servir, dans le calcul, d'une fonction que si elle est définie au moyen d'une infinité dénombrable d'éléments. Tel est le cas des fonctions continues, et aussi des fonctions discontinues seulement pour une infinité dénombrable de valeurs de la variable. De telles fonctions peuvent, en effet, être définies, au moyen d'une infinité dénombrable de conditions et même, si l'on veut préciser davantage, au moyen d'une infinité dénombrable de nombres entiers (¹).

Il en est de même pour les ensembles de points. On peut dire que chaque fonction $f(x)$, égale à 0 ou à 1 pour toute valeur réelle de la variable, sépare les nombres réels en deux classes et, par suite, définit deux ensembles de points : l'ensemble des points pour lesquels la fonc-

(¹) Ces conditions ne sont d'ailleurs pas arbitraires; nous reviendrons sur ce point dans la Note III.

tion a la valeur o et l'ensemble des points pour lesquels la fonction a la valeur 1. Donc, l'ensemble F de ces fonctions est identique à l'ensemble de tous les ensembles possibles (ayant pour éléments des nombres réels); cet ensemble a donc une puissance supérieure à celle du continu et son élément *général* (c'est-à-dire un ensemble *arbitraire* de nombres réels) ne peut être défini qu'au moyen d'un ensemble de conditions ayant la puissance du continu. C'est ce qui rend les raisonnements sur ces ensembles généraux si difficiles et parfois impossibles; c'est ce qui les rend aussi le plus souvent inutiles dans l'état actuel de la Science, car il ne semble pas qu'il soit aisé d'introduire dans un raisonnement l'un de ces ensembles, défini par une infinité non dénombrable de conditions. Au contraire, nous avons vu (p. 50) que l'ensemble des ensembles parfaits a la puissance du continu. On voit aisément qu'il en est de même des ensembles que nous avons appelés *mesurables;* c'est ce qui permet de raisonner plus aisément sur ces classes particulières d'ensembles et d'en découvrir des propriétés.

En résumé, il y a lieu, soit dans les ensembles de points, soit dans les fonctions discontinues, de distinguer deux grandes classes : les ensembles et les fonctions qui ne peuvent pas être définis par une infinité dénombrable de conditions et ceux qui peuvent l'être. Ces derniers seuls semblent pouvoir être actuellement considérés avec profit.

NOTE II.

LA CROISSANCE DES FONCTIONS ET LES NOMBRES DE LA DEUXIÈME CLASSE.

Le théorème de Paul du Bois-Reymond.

On sait que, pour mesurer une longueur L avec une unité de longueur donnée l, on remarque que l'on peut trouver un entier n tel que l'on ait

$$nl \leqq L < (n+1)l.$$

Si l'on pose $L - nl = l_1$, on pourra trouver un entier n_1 non nul et tel que

$$n_1 l_1 \leqq l \leqq (n_1+1) l_1.$$

En continuant de même, on posera $l - n_1 l_1 = l_2$ et l'on définira la mesure de L par la fraction continue

$$n + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \ddots}}$$

Ce procédé reçoit souvent le nom d'*algorithme d'Euclide;* on sait que son succès tient aux faits suivants :

1° On a la notion de la suite indéfinie des nombres entiers;

2° Étant données deux grandeurs de même nature L et l, il existe un nombre entier m tel que $ml > L$: c'est ce qu'on appelle, en général, l'*axiome d'Archimède;*

3° Enfin, tout nombre incommensurable peut être entièrement défini par une infinité dénombrable de nombres commensurables.

Considérons deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ de la variable réelle positive x et supposons que ces fonctions soient croissantes et qu'elles croissent indéfiniment lorsque x augmente indéfiniment; supposons, de plus, que le rapport $\frac{f(x)}{g(x)}$ croisse indéfiniment avec x; nous pourrons convenir d'écrire

$$f(x) > g(x)$$

et de dire que la croissance de $f(x)$ est supérieure à la croissance de $g(x)$.

Si $\frac{f(x)}{g(x)}$ tend vers une limite finie (ou reste compris entre des limites finies) lorsque x augmente indéfiniment, les croissances de $f(x)$ et de $g(x)$ seront dites *égales;* si ce rapport tend vers zéro, la croissance de $f(x)$ sera dite *inférieure* à la croissance de $g(x)$. Il importe de remarquer qu'étant données deux fonctions positives croissantes, la croissance de l'une d'elles n'est pas nécessairement supérieure, égale ou inférieure à celle de l'autre, car le rapport $\frac{f(x)}{g(x)}$ peut, lorsque x augmente indéfiniment, prendre alternativement des valeurs aussi grandes que l'on veut et aussi petites que l'on veut. C'est là une différence importante entre les croissances et les grandeurs; mais cette difficulté ne se présentant pas avec les fonctions usuelles, on peut la réserver dans une première étude (¹) et supposer que l'on considère un ensemble de fonctions croissantes positives, telles que deux quelconques d'entre elles soient *comparables* (c'est-à-dire aient des croissances, ou égales, ou inégales dans un sens bien déterminé). On peut alors se demander s'il est possible de créer pour un tel système une théorie analogue à celle de la mesure des longueurs. Les remarquables travaux de Paul du Bois-Reymond ont montré qu'il n'en est pas ainsi et que l'étude de la croissance des fonctions est beaucoup plus compliquée que l'étude de la mesure des grandeurs continues. Malgré ce résultat négatif, les recherches de Paul du Bois-Reymond n'ont pas été infructueuses; elles l'ont conduit à de nombreux résultats positifs dont le plus important nous paraît être le théorème que nous allons maintenant démontrer (²).

Du Bois-Reymond a obtenu ce théorème en cherchant à construire une suite de fonctions croissantes ayant, par rapport à l'ensemble des autres, les propriétés fondamentales du système des nombres entiers qui servent de base à l'algorithme d'Euclide. D'une manière précise, il a recherché si l'on peut trouver une suite dénombrable de fonctions croissantes

$$(\varphi) \qquad \varphi_1(x),\quad \varphi_2(x),\quad \varphi_3(x),\quad \ldots,\quad \varphi_n(x),\quad \ldots,$$

telles que l'on ait

$$\varphi_1(x) < \varphi_2(x) < \varphi_3(x) < \ldots$$

et que, $\psi(x)$ étant une fonction croissante quelconque donnée, il existe un indice m donnant lieu à l'inégalité

$$\psi(x) < \varphi_m(x).$$

(¹) On serait amené, pour la résoudre, à reprendre en la complétant la théorie des *enveloppes d'indétermination* de Paul du Bois-Reymond.

(²) M. Pincherle a fait aussi sur la croissance des fonctions des recherches intéressantes; mais nous ne pouvons les exposer sans dépasser les limites de cette Note.

Le théorème de Paul du Bois-Reymond consiste en ce que l'*on ne peut pas trouver de suite telle que* (φ). Sous une forme plus nette, *étant donnée une suite dénombrable quelconque* (φ) *de fonctions croissantes, on peut trouver effectivement une fonction croissante* $\psi(x)$, *telle que l'on ait, quel que soit m,*

$$\psi(x) > \varphi_m(x).$$

C'est sous cette forme positive que nous allons démontrer le théorème de Paul du Bois-Reymond; c'est d'ailleurs sous cette forme surtout qu'il peut rendre des services en Analyse. Mais nous avons tenu à indiquer le lien qui le rattachait à la théorie de la mesure des grandeurs, ne serait-ce que pour faire voir, par un exemple précis, comment l'étude approfondie des principes d'une théorie élémentaire, telle que celle de la mesure des grandeurs, peut conduire à des résultats analytiques importants.

Nous considérons donc une suite de fonctions croissantes

$$(\varphi) \qquad \varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \ldots, \quad \varphi_n(x), \quad \varphi_{n+1}(x), \quad \ldots.$$

Par hypothèse, la croissance de $\varphi_{n+1}(x)$ est supérieure à celle de $\varphi_n(x)$, c'est-à-dire que $\frac{\varphi_{n+1}(x)}{\varphi_n(x)}$ augmente indéfiniment avec x; on ne peut en conclure que, pour toute valeur de x, la valeur numérique de $\varphi_{n+1}(x)$ est supérieure à celle de $\varphi_n(x)$. Mais on peut remplacer la suite (φ) par une nouvelle suite de fonctions croissantes

$$(\psi) \qquad \psi_1(x), \quad \psi_2(x), \quad \ldots, \quad \psi_n(x), \quad \ldots$$

ayant les propriétés suivantes :

1° Deux fonctions de même indice $\varphi_n(x)$ et $\psi_n(x)$ coïncident à partir d'une certaine valeur de x (qui dépendra en général de n).

2° *Pour toute valeur de* x la fonction $\psi_n(x)$ a une valeur supérieure ou égale à la valeur des fonctions $\varphi_n(x)$, $\psi_{n-1}(x)$, ..., $\psi_1(x)$.

Il suffit de montrer que l'on peut déterminer successivement les fonctions $\psi_n(x)$ de manière qu'elles aient ces propriétés. Supposons que nous ayons pu déterminer les n premières; nous allons voir que nous pourrons sans difficulté déterminer la fonction $\psi_{n+1}(x)$. En effet, par hypothèse, la croissance de $\varphi_{n+1}(x)$ est supérieure à celle de $\varphi_n(x)$ et, par suite, à celle de $\psi_n(x)$, qui coïncide avec $\varphi_n(x)$ pour les valeurs suffisamment grandes de x.

Donc, à partir d'une valeur suffisamment grande de x, la valeur de $\varphi_{n+1}(x)$ est supérieure à celle de $\psi_n(x)$. Dès lors, si l'on prend, pour chaque valeur de x, la valeur de $\psi_{n+1}(x)$ égale à la plus grande des valeurs des deux fonctions $\varphi_{n+1}(x)$, $\psi_n(x)$, on sera certain qu'à partir d'une certaine valeur de x la fonction $\psi_{n+1}(x)$ coïncidera avec $\varphi_{n+1}(x)$; elle satisfera d'ailleurs visiblement aux autres conditions exigées.

Considérons maintenant la suite (ψ) et définissons la fonction $\psi(x)$ par les égalités suivantes

$$\psi(n) = \psi_n(n).$$

Ces égalités donnent la valeur de la fonction $\psi(x)$ pour toutes les valeurs entières de x; on peut la définir pour les valeurs non entières par interpolation linéaire ([1]). Il résulte évidemment des hypothèses faites sur la suite (ψ) que la fonction $\psi(x)$ est croissante ; je dis qu'*il en résulte aussi que sa croissance est supérieure à celle de la fonction* $\varphi_m(x)$, *quel que soit l'entier* m. En effet, pour $x > m+1$, la valeur de $\psi(x)$ est visiblement supérieure à celle de $\psi_{m+1}(x)$; donc le rapport $\dfrac{\psi(x)}{\varphi_m(x)}$ est supérieur au rapport $\dfrac{\psi_{m+1}(x)}{\varphi_m(x)}$ et ce dernier augmente indéfiniment lorsque x augmente indéfiniment, car, à partir d'une certaine valeur de x, il coïncide avec le rapport $\dfrac{\varphi_{m+1}(x)}{\varphi_m(x)}$.

Le théorème de Paul du Bois-Reymond est donc démontré.

La formation d'une échelle de types croissants.

Ce théorème nous fournit le moyen, étant donnée une suite dénombrable de fonctions telles que la croissance de chacune d'elles est supérieure à la croissance des précédentes, de trouver une fonction dont la croissance est supérieure à celle de chacune des fonctions de la suite.

Nous dirons qu'un ensemble E de fonctions $\varphi(x)$ constitue une *échelle de types croissants* ([2]) si deux fonctions quelconques de cet ensemble sont comparables entre elles et si, de plus, une fonction croissante *quelconque* $\psi(x)$ étant donnée, il existe dans l'ensemble une fonction $\varphi(x)$ supérieure à $\psi(x)$. La connaissance de l'ensemble E permettrait évidemment de faire un premier pas dans la théorie de la mesure des croissances : le théorème de du Bois-Reymond exprime qu'un tel ensemble ne peut pas être dénombrable. Nous allons néanmoins chercher à en construire un, ne serait-ce que pour donner une idée des difficultés que l'on rencontre lorsque l'on veut définir un ensemble non dénombrable sans faire appel à l'intuition du continu.

Remarquons d'abord que, si l'on a une fonction croissante $\varphi(x)$, dont la croissance est supérieure à celle de x, la fonction $\varphi[\varphi(x)]$ a une croissance supérieure à celle de $\varphi(x)$; car, si l'on pose $\varphi(x) = X$, on a

$$\frac{\varphi[\varphi(x)]}{\varphi(x)} = \frac{\varphi(X)}{X}$$

([1]) C'est-à-dire en posant pour $n \leq x \leq n+1$

$$\psi(x) = \psi(n) + [\psi(n+1) - \psi(n)](x-n).$$

([2]) Deux fonctions dont les croissances seront égales sont dites appartenir au même type.

et, par hypothèse, le dernier rapport augmente indéfiniment avec X; or X augmente indéfiniment lorsque x augmente indéfiniment.

Si l'on pose

$$\varphi[\varphi(x)] = \varphi_2(x),$$
$$\varphi_{m-1}[\varphi(x)] = \varphi_m(x),$$

la suite $\varphi(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_m(x)$, ... est une suite dénombrable de fonctions telles que la croissance de chacune soit supérieure à celle de la précédente. Nous pouvons supposer, pour fixer les idées, $\varphi(x) = e^x$. D'après le théorème de du Bois-Reymond, il existe une fonction $\psi(x)$ dont la croissance dépasse celle de chacune des fonctions $\varphi_m(x)$; nous savons construire une telle fonction et nous pouvons la désigner (¹) par $\varphi_\omega(x)$. Par hypothèse, l'inégalité

$$(1) \qquad m > n$$

avait pour conséquence

$$(2) \qquad \varphi_m(x) > \varphi_n(x);$$

d'autre part, nous avons, quel que soit m,

$$(2)' \qquad \varphi_\omega(x) > \varphi_m(x).$$

Nous pouvons donc convenir d'écrire

$$(1)' \qquad \omega > m,$$

cette inégalité (1)', dans laquelle m est un nombre entier arbitraire, n'étant pas autre chose qu'une manière commode d'écrire l'inégalité (2)'.

Nous poserons

$$\varphi_\omega[\varphi_\omega(x)] = \varphi_{2\omega}(x),$$
$$\varphi_{(m-1)\omega}[\varphi_\omega(x)] = \varphi_{m\omega}(x).$$

Il est clair que la suite des fonctions

$$\varphi_\omega(x), \quad \varphi_{2\omega}(x), \quad \ldots, \quad \varphi_{m\omega}(x), \quad \ldots$$

a les mêmes propriétés que la suite

$$\varphi(x), \quad \varphi_2(x), \quad \ldots, \quad \varphi_m(x), \quad \ldots$$

Nous pouvons, par le théorème de du Bois-Reymond, trouver une fonction

$$\varphi_{\omega\omega}(x) = \varphi_{\omega^2}(x)$$

dont la croissance soit supérieure à celle de chacune des fonctions $\varphi_{m\omega}(x)$.

(¹) En ce moment, nous introduisons cette notation, sans qu'il soit nécessaire d'expliquer quel sens on peut lui attribuer : c'est une simple *notation commode*. Nous verrons plus loin comment elle se rattache à la théorie des nombres transfinis de M. G. Cantor.

En opérant sur $\varphi_{\omega^2}(x)$ de la même manière que sur $\varphi_{\omega}(x)$ on peut obtenir une fonction [1] $\varphi_{\omega^3}(x)$, puis à l'aide de celle-ci une fonction $\varphi_{\omega^4}(x)$, et généralement une fonction $\varphi_{\omega^m}(x)$ dépendant d'un entier m. De l'ensemble de ces fonctions le même théorème permet de déduire une fonction $\varphi_{\omega^\omega}(x)$ dont la croissance dépasse celle de chacune d'elles. On peut continuer ainsi *indéfiniment*, c'est-à-dire, chaque fois que la répétition d'un procédé déterminé aura fourni une infinité dénombrable de fonctions, en obtenir encore une nouvelle par le théorème de du Bois-Reymond. On voit que ce théorème joue à peu près le même rôle que, dans la formation de la suite des nombres entiers, le principe : après chaque nombre entier il y en a un autre.

Mais il importe de remarquer une différence essentielle : d'après sa nature même, le procédé de Paul du Bois-Reymond sera applicable du moment que l'on aura un ensemble dénombrable de fonctions. Or, si nous nous donnons un ou plusieurs procédés *déterminés* pour former des fonctions à croissance de plus en plus rapide, et si nous les appliquons *indéfiniment*, il est clair que nous obtiendrons toujours une infinité dénombrable de fonctions ; car *répéter indéfiniment* une opération ne peut, pour l'instant, être autre chose que la répéter n fois, et faire croître l'entier n indéfiniment. Par suite, si l'on procède ainsi, et si l'on part d'un nombre limité d'opérations (ou même d'une infinité dénombrable), on n'obtiendra jamais qu'une infinité dénombrable de fonctions.

Nous aboutissons ainsi à une antinomie : d'une part, l'application *indéfinie* du théorème de Paul du Bois-Reymond, joint à tels autres procédés d'itération que l'on pourra indiquer, ne peut fournir qu'une infinité dénombrable de types de croissance ; d'autre part, du moment que l'on a seulement une infinité dénombrable de types, le procédé de du Bois-Reymond est encore applicable. Cette antinomie nous impose la *nécessité logique* d'étendre le sens du mot *indéfiniment ;* pour éviter toute confusion, nous éviterons de modifier le sens de ce mot et préférerons introduire le mot nouveau *transfiniment*.

Répéter *transfiniment* l'application du procédé de du Bois-Reymond, ce sera la répéter chaque fois que l'on aura une infinité dénombrable de types croissants, quel que soit le procédé par lequel on a obtenu cette infinité. Par conséquent, par définition même, on obtient ainsi une *infinité non dénombrable* de types ; car, si l'on obtenait seulement une infinité dénombrable, on devrait encore appliquer le même procédé, sans en rester là. L'infinité de types ainsi obtenue sera dite être de la *seconde puissance* et l'on démontre en effet aisément que tout ensemble qui n'est pas de première puissance (p. 13 et 102) a une puissance égale ou supé-

(1) A un certain point de vue, il pourrait paraître plus naturel de désigner cette fonction par $\varphi_{\omega^4}(x)$, en regardant ω^4 comme le carré de ω^2, de même que ω^2 est le carré de ω. Mais ici nous sommes libres de choisir arbitrairement nos notations.

rieure à la seconde, ce qui justifie cette dénomination (1). On peut remarquer que la relation entre la notion de seconde puissance et le théorème de Paul du Bois-Reymond est exactement la même que la relation entre la notion de première puissance et le théorème : après chaque nombre entier, il y en a un autre. Mais l'induction qui nous amène à la notion de la seconde puissance paraît être de nature supérieure à celle qui nous amène à celle de la première puissance, quoique cependant elle s'impose comme tout aussi nécessaire.

Il y a lieu maintenant de se demander si, pour les fonctions croissantes, il existe une proposition analogue à l'axiome d'Archimède que nous avons rappelé au début de cette Note, c'est-à-dire si, *étant donnée une fonction croissante quelconque*, on finira par la dépasser en répétant *transfiniment* les procédés que nous avons indiqués. Il nous semble que c'est là un *axiome* qui doit être admis au même titre que l'axiome d'Archimède et d'une manière tout à fait générale; il est, en tous cas, certain que cette proposition n'est pas douteuse si, par les mots : *fonction quelconque*, on entend une fonction qui puisse être *effectivement définie*, c'est-à-dire telle que l'on puisse, par un nombre limité d'opérations, calculer, avec une approximation donnée, sa valeur pour une valeur donnée de la variable.

Désignons par (S) la suite transfinie de fonctions croissantes que nous venons de définir. Cette suite a les propriétés fondamentales suivantes :

1° Deux fonctions quelconques sont comparables entre elles.

2° Étant donnée une fonction quelconque de S, il y en a une qui la suit immédiatement.

3° Une fonction quelconque étant donnée, il y a dans S une infinité de fonctions qui lui sont supérieures.

Cette suite S possède ainsi quelques-unes des propriétés fondamentales de la suite des nombres entiers. On peut en déduire un ensemble Σ qui possédera de même quelques-unes des propriétés fondamentales de l'ensemble des nombres rationnels. Il suffit pour cela de procéder exactement de même que pour obtenir ce dernier ensemble : la considération des fonctions *inverses* des fonctions de S donnera des fonctions croissant de moins en moins vite; en les multipliant par la variable x, on aura des fonctions à croissance *plus rapide* que x, mais aussi peu que possible; par le procédé de l'itération, répété transfiniment, on formera un ensemble Σ de fonctions à croissance plus rapide que x et moins rapide que celle de x^2,

(1) En effet, tout ensemble non dénombrable a évidemment la propriété suivante : si l'on en extrait un ensemble dénombrable quelconque, il y subsiste encore un élément, et l'on peut répéter cette opération *transfiniment*, car, si on ne la pouvait répéter qu'*indéfiniment*, l'ensemble serait dénombrable. Cela suffit pour que nous soyons assurés que l'ensemble non dénombrable a une puissance égale ou supérieure à celle que nous appelons la *seconde*.

par exemple. Cet ensemble Σ sera d'ailleurs de seconde puissance et aura les propriétés suivantes :

1° Deux fonctions quelconques de Σ′ seront comparables entre elles.

2° Si l'on considère une fonction quelconque, comparable à toutes les fonctions de Σ, et dont la croissance est comprise entre celle de x et celle de x^2, la croissance de cette fonction sera entièrement définie par la suite transfinie des fonctions de Σ dont la croissance est plus grande et la suite transfinie des fonctions de Σ dont la croissance est plus petite.

D'ailleurs, réciproquement, tout mode de division des fonctions de Σ en deux ensembles, tels que chaque fonction du premier ait une croissance inférieure à toute fonction du second définit *un mode de croissance,* mais à ce mode ne correspond pas nécessairement *une fonction.* De même que toute division en deux classes de l'ensemble des nombres rationnels définit une *grandeur,* mais à cette grandeur ne correspond pas nécessairement un *nombre,* tant que l'on n'a pas *convenu* d'appeler *nombre* les nombres incommensurables. Il y aurait lieu de même ici, pour compléter ce *continu fonctionnel,* analogue au *continu linéaire,* d'introduire des *fonctions idéales,* analogues aux *nombres incommensurables.*

Une *fonction idéale,* c'est *un mode de division de l'ensemble* Σ *en deux classes telles que toute fonction de la première classe soit inférieure à toute fonction de la seconde classe et telles, de plus, qu'il n'y ait pas dans la première classe de fonction supérieure à toutes les autres, ni dans la seconde classe de fonction inférieure à toutes les autres.*

Par exemple, rangeons dans la première classe les fonctions $\varphi(x)$ telles que l'intégrale $\int_0^\infty \frac{dx}{\varphi(x)}$ n'ait pas de sens et dans la seconde les fonctions telles que l'intégrale $\int_0^\infty \frac{dx}{\varphi(x)}$ ait un sens. Nous aurons ainsi défini une *fonction idéale* telle que, si on la désigne par $\theta(x)$, l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\theta(x)}$$

est à la fois pourvue et dépourvue de sens. Cette propriété est tout aussi absurde pour celui qui regarderait $\theta(x)$ comme *une véritable fonction,* que la suivante, pour celui qui ne considérerait que de *véritables nombres :* il existe un nombre dont le carré est égal à 2.

D'ailleurs, il ne faut pas oublier que les fonctions de Σ sont supposées toutes comparables entre elles. Si nous sommes partis, pour la formation de S, de la fonction exponentielle e^x, nous dirons que les fonctions de S et de Σ appartiennent au type exponentiel et les fonctions croissantes qui s'introduisent naturellement leur seront comparables.

Nous avons dit que l'ensemble Σ est de la seconde puissance, c'est-

à-dire d'une puissance *inférieure, ou égale*, à celle du continu; il est aisé de voir que si on le complète à l'aide des *fonctions idéales,* on obtient un ensemble dont la puissance est *égale ou supérieure* à celle du continu. Nous nous contenterons de ces indications ([1]).

Que l'ensemble de toutes les fonctions croissantes (non idéales) ait une puissance égale à celle du continu, c'est une conséquence du fait que l'ensemble des fonctions continues a la puissance du continu, et il est clair que nous pouvons nous borner, pour définir la croissance, à considérer les fonctions continues croissantes.

Donc, la puissance de l'ensemble des fonctions croissantes est au plus égale à celle du continu; mais, d'autre part, elle lui est au moins égale, car cet ensemble renferme en particulier l'ensemble des fonctions x^α, où α est un nombre incommensurable quelconque : donc elle lui est égale. Ce point nous a paru utile à établir en toute rigueur, car il avait été contesté par du Bois-Reymond dans sa *Théorie générale des fonctions.*

Les nombres de M. G. Cantor.

Nous sommes maintenant à même d'exposer, comme nous la comprenons, la formation des nombres *plus grands que l'infini* introduits par M. G. Cantor. Citons d'abord textuellement quelques passages de M. G. Cantor (*Acta mathematica,* t. II, p. 385-399) :

« ..... La série (I) des nombres entiers réels et positifs 1, 2, 3, ..., ν, ... doit sa formation à la répétition et à la réunion d'unités qu'on a prises pour point de départ et que l'on considère comme égales..... La formation des nombres entiers réels *finis* repose donc sur le principe de l'addition d'une unité à un nombre *déjà formé;* j'appelle *premier principe* de formation ce moment qui, comme nous le verrons bientôt, joue aussi un rôle essentiel dans la production des nombres entiers supérieurs. Le nombre des nombres ν de la classe (I), formés de cette manière, est infini et parmi tous ces nombres il n'y en a pas qui soit plus grand que tous les autres. Il serait donc contradictoire de parler d'un nombre maximum de la classe (I); toutefois, on peut d'autre part imaginer un nouveau nombre, que nous appellerons ω, et qui *servira à exprimer que l'ensemble* (I) *est donné d'après la loi dans sa succession naturelle.* On peut même se représenter le nouveau nombre ω comme la limite vers laquelle tendent les nombres ν, à condition d'entendre par là que ω sera le *premier* nombre entier qui *suivra tous* les nombres ν, en sorte qu'il faut le déclarer supérieur à *tous* les nombres ν. En associant le nombre ω avec les unités

([1]) La première considération des fonctions idéales est due à Paul du Bois-Reymond; j'ai cherché à compléter un peu ses trop brèves indications. Dans un Mémoire récent, M. Pringsheim a fait, aux idées de Paul du Bois-Reymond sur ce sujet, des objections que je n'ai pu arriver à comprendre.

primitives, on obtient à l'aide du *premier principe* de formation ces nombres plus étendus

$$\omega+1, \quad \omega+2, \quad \ldots, \quad \omega+\nu, \quad \ldots;$$

comme par là on n'arrive encore une fois à aucun nombre maximum, on en imagine un nouveau que l'on peut appeler 2ω et qui sera le *premier* après tous les nombres obtenus jusqu'à présent ν et $\omega+\nu$, ...

» ..... La fonction logique qui nous a donné ces nombres ω et 2ω est évidemment différente du premier principe de formation; je l'appelle *deuxième* principe de formation des nombres réels entiers et je définis mieux ce principe en disant : *Étant donnée une succession quelconque déterminée de nombres entiers réels définis, parmi lesquels il n'y en a pas qui soit plus grand que tous les autres, on pose, en s'appuyant sur ce deuxième principe de transformation, un nouveau nombre que l'on regarde comme la limite des premiers c'est-à-dire qui est défini comme étant immédiatement supérieur à tous ces nombres.....*

» ..... La formation de nouveaux nombres, comme on le voit, est *sans fin;* en suivant les deux principes de formation on obtient toujours de nouveaux nombres et de nouvelles séries de nombres, avec une succession *parfaitement déterminée.*

» *On pourrait donc croire* d'abord que nous allons nous perdre à l'indéfini dans cette formation de nouveaux nombres entiers infinis déterminés et que nous ne sommes pas en état d'*arrêter provisoirement* ce procédé sans fin pour arriver par là à une *limitation semblable à celle que nous avons trouvée, en fait, dans un certain sens, par rapport à l'ancienne classe de nombres* (I); là, on n'employait que le premier principe de formation et on ne pouvait pas sortir de la série (I). Mais le deuxième principe de formation ne devait pas seulement nous conduire au delà du système de nombres employé jusqu'à présent; il nous apparaît encore certainement comme un moyen qu'on peut combiner avec le premier principe de formation pour arriver à *pouvoir franchir toute limite* dans la formation abstraite des nombres réels entiers.

» *Mais, si nous remarquons maintenant que tous les nombres obtenus jusqu'à présent et ceux qui les suivent immédiatement remplissent une certaine condition*, nous verrons que cette condition, *si on la pose comme obligatoire pour tous les nombres à former immédiatement,* nous apparaît comme un *troisième* principe qui vient s'ajouter aux deux premiers et que j'appelle *principe d'arrêt et de limitation.....* Cette condition est : que *le système des nombres qui se trouvent dans la suite des nombres avant celui que l'on considère* et à partir de 1 soit de la même puissance que la première classe de nombres (I)..... La deuxième classe de nombres (II) définie par l'adjonction de ce principe n'acquiert pas seulement une puissance plus élevée que (2), mais *précisément la puissance immédiatement supérieure* et, par conséquent, la *deuxième puissance* ».

On voit l'analogie qu'il y a entre le *deuxième principe* de M. G. Cantor et le *théorème* de Paul du Bois-Reymond et, en même temps, les différences profondes qui les séparent. Le *principe* est posé *a priori;* par suite, si on l'admet, on doit lui accorder une valeur absolue; il débordera tout, si on ne l'arrête, ce qui est le rôle du *troisième principe*. Le *théorème*, au contraire, n'est pas un postulat; c'est un *fait mathématique* qui ne repose sur aucune considération *a priori,* mais sa puissance est bien plus limitée : il porte en lui-même le principe d'arrêt, car il n'est applicable qu'autant que l'ensemble déjà obtenu est dénombrable. D'autre part, comme son application *indéfinie* conduit seulement à un ensemble dénombrable, auquel il est *encore* applicable, il y a là une antinomie qui, comme nous l'avons vu, ne peut se résoudre qu'en attribuant un sens au mot *transfiniment* et admettant, par suite, qu'en appliquant *transfiniment* le théorème on aura un ensemble de fonctions de puissance supérieure à la première obtenu ainsi d'une manière nécessaire [1].

On peut se demander si, au contraire, il n'y a pas beaucoup d'illusion dans l'idée que nous nous sommes faite, après M. G. Cantor, de la puissance du deuxième principe de formation.

Il semble en effet, quand on y regarde d'un peu plus près, que ce principe n'ait nullement le pouvoir de créer par lui-même de nouvelles *puissances,* c'est-à-dire de nous élever, par sa seule force, au delà de la première puissance. Il est bien clair que, si nous utilisons le premier et le deuxième principe, l'un après l'autre, une infinité dénombrable de fois, nous n'obtiendrons jamais qu'un ensemble de première puissance.

D'une manière plus générale, quel que soit le procédé *déterminé* de formation que l'on indique, du moment que ce procédé sera *complètement exprimable* au moyen d'un nombre fini de mots, parmi lesquels

---

(1) Une difficulté assez sérieuse provient de ce que le théorème de Paul du Bois-Reymond ne conduit pas à une fonction déterminée, car il peut être appliqué d'une infinité de manières. Il ne conduit surtout pas à la *plus petite* des fonctions supérieures aux fonctions données. Mais on peut remarquer que, pour former la fonction $\psi(x)$ au moyen de la suite $\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x), \ldots$ (en reprenant les notations de la page 113), on se sert en réalité d'une certaine fonction croissante; nous avons posé

$$\psi(n) = \psi_n(n);$$

nous aurions pu prendre, plus généralement,

$$\psi[\theta(n)] = \psi_n[\theta(n)],$$

$\theta(n)$ étant une fonction croissante quelconque. Mais il est naturel de ne prendre pour $\theta(n)$ qu'une des fonctions croissantes qui ont été définies jusque-là, et non pas une fonction à croissance tellement rapide qu'on ne l'ait pas encore atteinte. On peut prendre aussi pour $\theta(n)$ la fonction inverse des fonctions croissantes déjà considérées; mais on n'a le choix qu'entre une infinité dénombrable, ce qui est l'essentiel.

peut figurer le mot *indéfiniment,* on n'obtiendra jamais qu'un ensemble de première puissance, si le mot *indéfiniment* signifie toujours : *aussi souvent qu'il y a de nombres entiers.* Et nous n'avons pas le droit de donner un autre sens au mot *indéfiniment,* si nous n'avons pas la notion d'une puissance supérieure à la première; or c'est précisément cette notion qu'il s'agit d'acquérir : nous tournons dans un cercle.

Si nous introduisons l'expression *transfiniment,* en lui donnant le sens précis de *aussi souvent qu'il y a d'éléments dans un ensemble de deuxième puissance,* nous pourrons dire que l'application transfinie du deuxième principe donnera des nombres de deuxième classe, mais on n'obtiendra jamais ainsi un ensemble de nombres de *troisième* puissance. Il faudrait avoir déjà l'idée d'un ensemble ayant cette puissance, afin de répéter l'application du deuxième principe aussi souvent qu'il y a d'éléments dans cet ensemble.

En d'autres termes, le deuxième principe de formation ne peut nous faire acquérir la notion d'une *puissance* que nous n'aurions pas déjà; et il semble bien douteux que nous ayons une idée quelque peu précise de ce que peut être une puissance qui dépasse la deuxième (¹). Il est bien probable que, avant d'acquérir une telle idée, si nous y arrivons jamais, il aura été nécessaire d'étudier d'une manière approfondie les ensembles de deuxième puissance, de telle manière que nous sachions en user aussi commodément que des ensembles dénombrables. Le jour où ce résultat, dont l'importance pour la Science serait considérable, sera atteint, on aura une base solide pour l'étude des puissances supérieures; mais on ne peut nier que, actuellement, l'expression *transfiniment* n'ait encore pour nous un sens moins précis que l'expression *indéfiniment,* de sorte que nos connaissances précises sur les puissances diverses n'excèdent guère la remarque suivante : il y a des ensembles dénombrables [et des ensembles non dénombrables, cette dernière notion étant surtout négative.

(¹) Je laisse de côté ici, sans m'inquiéter de savoir si elles sont ou non distinctes des puissances des classes de nombres, la puissance du continu et les puissances qui s'y rattachent (ensembles de fonctions, etc.) dont nous acquerrons la notion par des procédés tout différents. Il se présente, en effet, lorsqu'on emploie ces procédés pour définir les puissances, une difficulté très grave : on définit des puissances de plus en plus grandes, mais on ne sait pas si elles sont *consécutives,* c'est-à-dire s'il n'y a pas, par exemple, une puissance intermédiaire entre celle du continu et celle de l'ensemble des fonctions discontinues.

NOTE III.

LA NOTION DE FONCTION EN GÉNÉRAL.

La notion de fonction est extrêmement générale et comprend plusieurs notions particulières que l'on peut considérer séparément : c'est ainsi que l'on peut distinguer, entre les fonctions d'une ou de plusieurs variables, les fonctions continues et discontinues, les fonctions analytiques d'une variable complexe et les fonctions de variable réelle, les fonctions ayant ou n'ayant pas de dérivée, etc. Nous nous proposons de jeter un coup d'œil d'ensemble sur ces diverses notions, et, en particulier, de tâcher de nous rendre compte en quoi elles diffèrent et en quoi elles sont analogues.

Les fonctions discontinues.

Occupons-nous d'abord de la notion la plus générale de la fonction, sans aucune restriction : ce sera une fonction discontinue. Une fonction f de trois variables x, y, z, par exemple, sera définie par cette *seule* condition, qu'à tout système (¹) de valeurs des trois variables x, y, z correspond une valeur bien déterminée (²) de $f(x, y, z)$. Il est aisé de voir que le nombre des variables importe peu dans une telle notion; nous savons, en effet, que l'ensemble des points de l'espace a même puissance que l'ensemble des points d'une droite compris entre 0 et 1. Si, au système de valeurs x, y, z correspond ainsi la valeur X comprise entre 0 et 1, il suffit de poser

$$f(x, y, z) = \varphi(X),$$

pour définir une fonction $\varphi(X)$ d'une seule variable X, qui correspond d'une manière bien déterminée à la fonction $f(x, y, z)$. Cette correspondance est d'ailleurs réciproque et univoque : deux fonctions étant regardées

(¹) On pourrait considérer seulement les systèmes de valeurs appartenant à un certain domaine; pour les autres, la fonction ne serait pas définie.

(²) On pourrait supposer, plus généralement, qu'il y a plusieurs valeurs, ou même une infinité dénombrable; on verra aisément que les conséquences qui suivent n'en seraient pas modifiées.

comme distinctes lorsqu'elles ont une valeur différente en l'*un* au moins des points où elles sont définies, à deux fonctions distinctes $f(x, y, z)$ correspondent deux fonctions distinctes $\varphi(X)$ et réciproquement.

Par conséquent, *l'ensemble de toutes les fonctions discontinues d'un nombre quelconque de variables a même puissance que l'ensemble des fonctions discontinues d'une variable réelle* X *assujettie à rester comprise entre* 0 *et* 1.

Il est facile de ramener la puissance de ce dernier ensemble à une puissance définie d'une manière un peu plus simple. Remarquons d'abord que l'on n'introduit pas de restriction sérieuse en supposant que la fonction $\varphi(X)$ a constamment une valeur comprise ([1]) entre 0 et 1. Si nous écrivons cette valeur dans le système de numération de base 2, elle sera de la forme

$$(\alpha) \qquad \varphi(X) = 0,10100111\ldots,$$

tous les chiffres décimaux étant égaux à 0 ou à 1.

Remarquons que, X étant un nombre quelconque compris entre 0 et 1, tous les nombres positifs sont de la forme $n + X$, n étant un nombre entier. Cela étant, nous pouvons définir un ensemble de points de la manière suivante : *le point* $n + X$ *appartiendra à l'ensemble* si, dans la valeur (α) de $\varphi(X)$, le $n^{\text{ième}}$ chiffre décimal est 1 ; il ne lui appartiendra pas si ce $n^{\text{ième}}$ chiffre décimal est 0. Il est clair que chaque fonction $\varphi(X)$ permet de définir un tel ensemble; d'ailleurs, cet ensemble est unique si la fonction ne prend aucune valeur commensurable de la forme $\frac{p}{2^m}$, car un tel nombre peut se mettre de deux manières différentes sous la forme (α), en vertu de l'identité

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots = 0,1111\ldots.$$

Réciproquement à un tel ensemble correspond une fonction unique $\varphi(X)$;

([1]) En effet, il suffit de remplacer $\varphi(X)$ par la fonction $\psi(X)$ ainsi définie : Si

$$\begin{aligned}
0 &\leq \varphi(X) < 1, & \psi(X) &= \frac{1}{4}\varphi(X),\\
-1 &\leq \varphi(X) < 0, & \psi(X) &= \frac{1}{4}\varphi(X) + \frac{1}{2},\\
1 &\leq \varphi(X) < +\infty, & \psi(X) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4\varphi(X)},\\
-\infty &< \varphi(X) < -1, & \psi(X) &= 1 + \frac{1}{4\varphi(X)},
\end{aligned}$$

on voit aisément que, réciproquement, la connaissance de la valeur de $\psi(X)$ détermine celle de $\varphi(X)$.

donc, *l'ensemble des fonctions* $\varphi(X)$ *a une puissance au plus égale à la puissance de l'ensemble des ensembles de points réels positifs*. Mais il est clair que cette puissance est la même que l'ensemble des ensembles de points compris entre o et 1; et, comme un tel ensemble peut être considéré comme correspondant à une fonction $\varphi(X)$ prenant seulement les deux valeurs o et 1, on voit que l'ensemble de ces ensembles a une puissance inférieure ou égale à l'ensemble des fonctions $\varphi(X)$; ces deux puissances sont donc égales.

Nous voyons donc, en définitive, que [1] *l'ensemble des fonctions discontinues d'un nombre quelconque de variables réelles a même puissance que l'ensemble des fonctions discontinues d'une variable réelle, comprise entre* o *et* 1, *ces fonctions prenant seulement la valeur* o *ou la valeur* 1; *ou*, ce qui revient au même, *que l'ensemble des ensembles de points compris entre* o *et* 1.

Nous avons déjà montré que cette puissance est supérieure à la puissance du continu; mais il ne nous paraît pas inutile d'insister encore sur la difficulté qu'il y a à définir un tel ensemble. Étant données, en effet, deux fonctions discontinues $\varphi(X)$ et $\varphi_1(X)$ que nous pouvons, d'après ce qui précède, supposer égales toujours à o ou à 1, le problème de reconnaître si elles sont identiques ou différentes présente une difficulté toute particulière. Il n'est pas possible, en effet, de fixer une méthode telle que, si elles sont différentes, on en soit assuré *sûrement* au bout d'un nombre *fini* d'opérations; cela tient à ce que le continu n'est pas dénombrable. Si les fonctions $\varphi(X)$ et $\varphi_1(X)$ étaient continues, il en serait tout autrement; en effet, si deux telles fonctions coïncident pour les valeurs *commensurables* de X, elles coïncident pour toute valeur de X; si donc elles ne sont pas identiques, on s'en apercevra sûrement par la seule considération des valeurs commensurables : *il existe* un nombre commensurable $\frac{p}{q}$ tel que $\varphi\left(\frac{p}{q}\right)$ et $\varphi_1\left(\frac{p}{q}\right)$ diffèrent, c'est-à-dire aient seulement m chiffres décimaux communs, m étant un nombre déterminé.

Dès lors, si l'on range tous les nombres commensurables en une suite

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$$

ce que l'on sait faire, et si l'on calcule les valeurs $\varphi(u_1), \ldots, \varphi(u_n)$, $\varphi_1(u_1), \ldots, \varphi_1(u_n)$, avec n chiffres décimaux exacts, il arrivera nécessai-

(1) Si, employant un langage introduit par M. G. Cantor, nous désignons par a le *nombre cardinal* des points compris entre o et 1, ce théorème peut être traduit par l'égalité

$$a^{a^n} = 2^a,$$

n étant un nombre entier quelconque; on pourrait d'ailleurs supposer aussi que n est un nombre de la deuxième classe.

rement, si l'on fait successivement cette opération pour

$$n = 1, 2, 3, \ldots,$$

que, pour une valeur *finie* de n, c'est-à-dire au bout d'un nombre *fini* d'opérations, on sera assuré que les deux fonctions ne sont pas identiques.

D'ailleurs, il est évident que ce nombre ne sera pas connu d'avance et que, par suite, l'on ne pourra pas, de calculs aussi longs qu'ils soient, conclure à l'identité des deux fonctions. Mais, si elles diffèrent, on est sûr de s'en apercevoir avec assez de persévérance. Il n'y a rien de pareil pour les fonctions discontinues : une telle fonction est définie *par une infinité non dénombrable de conditions;* en pratique, cela revient à dire qu'il est *impossible* de la *définir*. Il y aurait lieu de distinguer parmi les fonctions discontinues les plus générales, qui paraissent devoir être exclues, au moins pour l'instant, des considérations mathématiques, des fonctions dont la discontinuité est assujettie à des restrictions. *Ces restrictions doivent être de nature telle que la fonction puisse être entièrement définie par une infinité dénombrable de conditions.* L'ensemble des fonctions satisfaisant à ces conditions restrictives a alors même puissance que le continu. Parmi les fonctions satisfaisant à des conditions restrictives de ce genre, je citerai les fonctions discontinues seulement en une infinité dénombrable de points, que plusieurs géomètres ont considérées avec profit. Mais je ne puis m'étendre longuement sur ce sujet; je tenais seulement à indiquer la restriction indispensable qu'on doit apporter à l'idée générale de fonction, si l'on veut pouvoir l'utiliser ([1]).

Les fonctions définies par des conditions dénombrables.

On peut évidemment imaginer une infinité de classes de fonctions, telles que les fonctions de chaque classe soient entièrement définies à l'aide d'une infinité dénombrable de conditions ([2]) de sorte que la puissance de l'ensemble formé par les fonctions d'une classe est précisément la puissance du continu. Nous nous proposons d'étudier quelques-unes de ces classes de fonctions, en particulier au point de vue des rapports qu'elles ont entre elles; on apercevra aisément, d'ailleurs, ce qui, dans

---

([1]) Cela ne veut pas dire que l'on ne puisse trouver quelques résultats s'appliquant à *toutes* les fonctions et pouvant rendre des services; tel est, par exemple, le beau théorème de M. Darboux sur l'intégrale définie : *il existe toujours* une intégrale par excès et une intégrale par défaut (*voir* Jordan, *Cours d'Analyse*). Mais de tels résultats sont forcément rares et ce théorème lui-même, malgré sa beauté théorique, n'a d'applications possibles que si l'on restreint beaucoup la généralité de la notion de fonction.

([2]) Bien entendu ces conditions sont *simples;* on peut supposer, si l'on veut, que chaque condition se traduit par le fait que l'on donne un nombre entier.

nos considérations s'appliquerait sans modification à telles autres classes que l'on voudrait considérer.

On appelle *fonction analytique* de plusieurs variables x, y, z toute fonction qui peut être représentée par un développement de la forme

$$(1)\quad \varphi(x-a, y-b, z-c) = \Sigma_{\alpha,\beta,\gamma} A_{\alpha,\beta,\gamma}(x-a)^{\alpha}(y-b)^{\beta}(z-c)^{\gamma}$$

ordonné suivant les puissances positives de $x-a$, $y-b$, $z-c$, et convergent dans certains cercles, c'est-à-dire sous les conditions

$$|x-a| < r, \quad |y-b| < r', \quad |z-c| < r'',$$

r, r', r'' étant des nombres positifs déterminés.

La condition que *le développement* (1) *ne diverge pas pour tout système de valeurs* [1] *de* x, y, z est essentielle; elle s'exprime par des inégalités assez compliquées auxquelles doivent satisfaire [2] les coefficients $A_{\alpha,\beta,\gamma}$. Désignons par E_3 l'ensemble des développements tels que (1), les coefficients $A_{\alpha,\beta,\gamma}$ étant absolument quelconques, et par F_3 l'ensemble des développements qui satisfont à la condition dont nous venons de parler : l'ensemble F_3 est précisément l'ensemble des fonctions analytiques à *trois* variables; il est une partie aliquote de l'ensemble E_3.

D'une part, il est aisé de montrer que l'ensemble E_3 a la puissance du continu (p. 19); d'autre part, on voit aisément que l'ensemble F_3 a une puissance supérieure ou égale à celle du continu (car, l'un des coefficients, par exemple $A_{0,0,0}$ peut évidemment prendre une valeur arbitraire); donc l'ensemble F_3 a précisément la puissance du continu : mais l'*établissement effectif* d'une correspondance univoque et réciproque, entre les éléments de F_3 et les nombres compris entre 0 et 1, par exemple, paraît un problème ardu [3], tandis qu'une telle correspondance est, au contraire, très aisée à établir, si, au lieu de F_3, on considère E_3.

Un phénomène analogue se produit lorsque l'on compare les ensembles de fonctions analytiques dépendant d'un nombre différent de variables; nous allons l'étudier avec un peu plus de détail.

Pour simplifier l'écriture nous allons comparer l'ensemble F_2 des fonctions analytiques à *deux* variables et l'ensemble F_1 des fonctions analytiques à *une* variable. Nous considérerons en même temps les

---

[1] Les systèmes de valeurs, pour lesquels *l'un* au moins des binomes $x-a$, $y-b$, $z-c$ serait nul, sont ici exclus.

[2] On peut consulter à ce sujet une Note de M. E. Lemaire, *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1897.

[3] Il semble que la seule voie à suivre soit précisément celle qui a servi à démontrer le théorème sur lequel nous nous sommes appuyés (Note I, p. 106), mais cette marche, théoriquement simple, n'est pas sans présenter des difficultés pratiques assez sérieuses.

ensembles E_2 et E_1 formés par les développements non assujettis à la condition de convergence [1] :

$$(E_2) \qquad \Sigma A_{\alpha,\beta} x^{\alpha} y^{\beta}$$

$$(E_1) \qquad \Sigma B_n z^n.$$

Les ensembles F_2 et F_1 sont respectivement des parties aliquotes de E_2 et de E_1; tous ces ensembles ont d'ailleurs la puissance du continu et par suite deux quelconques d'entre eux ont même puissance. Mais nous allons voir qu'il est très aisé d'établir une correspondance univoque et réciproque entre les éléments de E_2 et de E_1, tandis qu'il n'en est pas de même si l'on considère F_2 et F_1, bien qu'on soit assuré que ces ensembles ont même puissance.

Pour établir la correspondance entre les éléments de E_2 et ceux de E_1, il suffit (*Cf.* p. 8) de poser

$$A_{\alpha,\beta} = B_n$$

sous la condition

$$(a) \qquad n = \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}{2} + \alpha.$$

Lorsqu'on donne α et β cette relation permet de calculer n; si l'on donne n, on prendra d'abord pour $\alpha+\beta$ le plus grand nombre entier u vérifiant l'inégalité

$$\frac{u(u+1)}{2} \leqq n,$$

ce qui revient à dire que, v étant la racine carrée à une unité près par défaut de $8n+1$, $2u+1$ est égal à v si v est impair et à $v-1$ si v est pair.

Connaissant $u = \alpha+\beta$, la relation (a) donnera

$$\alpha = n - \frac{u(u-1)}{2}$$

et l'on aura ensuite $\beta = u - \alpha$.

La correspondance entre les éléments de E_2 et ceux de E_1 est ainsi très simplement définie; mais il est aisé de se rendre compte que cette correspondance transforme certaines séries E_2 *divergentes pour toutes les valeurs de x et de y* en séries E_1 *convergentes pour certaines valeurs*

---

[1] Nous supposons que les centres des cercles de convergence coïncident toujours avec l'origine; il n'y aurait pas plus de difficultés à étudier les ensembles plus étendus (mais de même puissance) qu'on obtient en les supposant arbitraires.

de z. Il suffit, en effet, de poser, par exemple,

$$A_{\alpha,\beta} = M_{\alpha,\beta}(\log u)^u,$$

$M_{\alpha,\beta}$ étant un nombre compris entre 1 et 2, par exemple. En effet, si la série E_2 était convergente pour $x = x_0$, $y = y_0$, la série

$$\sum_{\alpha,\beta} |A_{\alpha,\beta}| r^{\alpha+\beta}$$

serait convergente sous la seule condition que le nombre réel r soit inférieur à $|x_0|$ et à $|y_0|$; or, en désignant par M_u la somme des valeurs de $M_{\alpha,\beta}$ pour $\alpha + \beta = u$, cette série peut s'écrire

$$\sum_{u=1}^{u=\infty} M_u (\log u)^u r^u$$

et il est manifeste qu'elle n'est convergente pour aucune valeur de r, les nombres M_u étant tous supérieurs à *un*.

D'autre part, si l'on pose

$$B_n = M_{\alpha,\beta}(\log u)^u,$$

comme l'on a, par hypothèse,

$$M_{\alpha,\beta} < 2$$

et, d'après (a),

$$u < 2\sqrt{n},$$

on en conclut

$$B_n < (\log n + 1)^{2\sqrt{n}}$$

et il en résulte aisément que la série

$$\Sigma B_n z^n$$

est convergente pour $|z| < 1$.

On verrait aisément que toute correspondance simple établie entre les éléments de E_2 et ceux de E_1 donne lieu aux mêmes difficultés quand on considère F_2 et F_1; la correspondance est alors en défaut pour certains éléments de l'un de ces deux ensembles; à chacun de ces éléments ne correspond aucun élément de l'autre ensemble.

Malgré ce grave inconvénient, la correspondance que nous venons de réaliser est intéressante à cause de sa simplicité, et aussi de la propriété suivante, qui est évidente et qu'elle n'est pas d'ailleurs la seule à posséder : *à la somme de deux séries elle fait correspondre la somme des deux séries correspondantes* (E_1). Il est donc naturel de se demander si l'on ne pourrait pas s'en servir utilement, en se résignant à faire abstraction des éléments de F_1 auxquels ne correspond aucun élément de F_2. Mais nous allons rencontrer une autre difficulté; nous venons de remarquer que si, aux fonctions $\varphi_1(x, y)$ et $\varphi_2(x, y)$ correspondent respectivement les

fonctions $\psi_1(z)$ et $\psi_2(z)$, à la fonction $\varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y)$ correspondra la fonction $\psi_1(z) + \varepsilon\psi_2(z)$. Par suite, à la fonction

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x, y) + \varepsilon\varphi_2(x, y)$$

correspondra la fonction

$$\psi(z) = \psi_1(z) + \varepsilon\psi_2(z).$$

Si nous supposons que ε soit un infiniment petit, nous pourrons être tentés de dire que la fonction $\varphi(x, y)$ est infiniment voisine de la fonction $\varphi_1(x, y)$ et, par suite, d'énoncer le résultat suivant : *A deux fonctions infiniment voisines $\varphi_1(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ correspondent deux fonctions infiniment voisines $\psi_1(z)$ et $\psi(z)$*. Mais, en y regardant de plus près, on se rendra compte que la définition que nous venons de donner implicitement est tout à fait arbitraire et que rien ne la justifie. Il est certain que, suivant le genre de recherches que l'on fera, il peut être commode d'adopter telle ou telle définition des mots : *fonctions infiniment voisines*. Ce n'est point ici le lieu de discuter les diverses définitions que l'on pourrait proposer. Mais il nous semble que, si l'on ne se borne pas à considérer la fonction au voisinage d'un point, il n'y a pas lieu de considérer le développement

$$1 + z + z^2 + \ldots + \varepsilon(1 + 2z + 4z^2 + 8z^3 + \ldots)$$

comme infiniment voisin de celui qu'on obtient en faisant $\varepsilon = 0$; car, quelque petit que soit ε, dans le coefficient de $z^n(1 + \varepsilon 2^n)$, c'est le second terme qui est le plus grand à partir d'une certaine valeur de n.

Une observation analogue s'appliquerait au développement en série de la fonction

$$e^z + \varepsilon e^{z^2}.$$

Sans insister sur ces questions, on pressent la nature des difficultés qui se présenteront si l'on tient qu'à deux fonctions infiniment voisines correspondent deux fonctions infiniment voisines. Il faudra choisir les définitions d'une manière convenable, en ayant soin cependant de n'y point mettre trop d'arbitraire. On y arriverait sans doute ici sans trop de peine; mais avec d'autres classes de fonctions il pourrait en être tout autrement; la première difficulté que nous avons signalée se présenterait d'ailleurs aussi [1].

Parmi les classes de fonctions que l'on pourrait ainsi considérer, on peut citer l'ensemble des fonctions d'une variable réelle développables en série de Fourier :

$$(\mathrm{F}) \qquad a_0 + \Sigma(a_n \cos nx + b_n \sin nx);$$

on peut citer aussi l'ensemble des fonctions continues d'une ou plusieurs

---

(1) *Cf.* un intéressant Mémoire de M. Pincherle : *Sur le calcul fonctionnel distributif* (*Math. Annalen*, t. 49).

variables réelles. Pour donner ces dernières fonctions, il suffit de donner leur valeur pour les systèmes de valeurs toutes commensurables des variables ; ou, plus généralement, pour les points d'un ensemble dénombrable dense dans tout le domaine où la fonction doit être définie. Mais ces valeurs ne sont pas arbitraires : le fait que la fonction est continue les assujettit à des conditions d'une nature très compliquée.

Aussi l'établissement effectif d'une correspondance univoque et réciproque entre les éléments de deux de ces nouveaux ensembles est un problème encore plus difficile que ceux dont nous avons parlé tout à l'heure. On s'en rendra compte aisément en cherchant à établir une telle correspondance entre les fonctions continues d'une variable réelle, d'une part, et les fonctions analytiques d'une variable complexe, d'autre part. A plus forte raison aura-t-on des difficultés inextricables si l'on veut introduire la considération de fonctions infiniment voisines.

Ces faits montrent combien la notion de puissance, malgré son utilité incontestable et son intérêt, est peu riche en conséquences, parce que c'est, au fond, une notion très superficielle. La puissance d'un ensemble concret est une de ses propriétés ([1]), mais c'est loin d'être la plus importante. Aussi, sans méconnaître l'intérêt de ce résultat, par exemple : *l'ensemble des fonctions analytiques de deux variables a même puissance que l'ensemble des fonctions analytiques d'une variable,* on doit avouer qu'il est bien moins fécond en applications qu'on ne pourrait le croire d'abord. Il peut cependant, joint aux remarques qui précèdent, nous aider à comprendre assez nettement le rôle des fonctions arbitraires en Analyse.

([1]) La théorie des *types ordinaux* paraît être autrement riche que la théorie des puissances; mais elle paraît aussi autrement difficile à édifier entièrement. Aussi ai-je renoncé à l'idée que j'avais eue primitivement d'y consacrer une Note; car j'ai craint d'être à la fois trop long et trop incomplet. Pour donner quelque idée de l'objet de cette théorie, je citerai le théorème suivant, dû à M. G. Cantor : *Soient deux segments de droite, de longueur égale à l'unité et sur chacun d'eux un ensemble dénombrable partout dense; on peut toujours numéroter les éléments de chacun de ces ensembles de manière que la lettre a désignant les éléments du premier et la lettre b les éléments du second, la disposition relative de a_n et de a_m soit la même que la disposition relative de b_n et de b_m.*

Il est nécessaire, évidemment, si l'extrémité droite, par exemple, de l'un des segments appartient à l'ensemble correspondant, qu'il en soit de même de l'extrémité droite de l'autre segment. J'ajouterai que l'on peut, en modifiant légèrement la démonstration de M. Cantor, compléter son théorème en ajoutant que, ε *étant un nombre positif quelconque donné à l'avance, on peut s'arranger de manière que, quels que soient m et n, les segments $a_m a_n$ et $b_m b_n$ vérifient les inégalités*

$$1 - \varepsilon < \frac{a_m a_n}{b_m b_n} < 1 + \varepsilon ;$$

mais, bien entendu, si ε devient de plus en plus petit, on pourra être obligé de modifier le numérotage à mesure que ε variera.

La notion de fonction arbitraire.

Dans bien des problèmes qui se traduisent par des équations aux dérivées partielles, et, en particulier, dans bien des questions de Géométrie et de Physique mathématique, on est amené à dire que la solution générale dépend d'un certain nombre de fonctions arbitraires à un nombre déterminé d'arguments. Par exemple, la solution générale du problème de la déformation d'une surface renferme *deux* fonctions arbitraires d'*une* variable; la famille de Lamé la plus générale dépend de *trois* fonctions arbitraires de *deux* variables. Quel sens doit-on attribuer à cette « terminologie qui a quelque chose d'un peu indéterminé (¹) »? Si nous ne connaissions pas les résultats établis dans le paragraphe précédent, nous aurions pu être tentés de croire qu'elle exprime ceci : *L'ensemble des surfaces applicables sur une surface donnée a même puissance que l'ensemble des systèmes de deux fonctions arbitraires d'une variable.* Ces fonctions arbitraires doivent d'ailleurs être supposées *continues* (²) pour que la surface correspondante soit continue; et *analytiques,* si l'on veut borner le problème à la recherche des surfaces analytiques.

Cette proposition est incontestable, mais elle resterait exacte si nous remplacions dans son énoncé les mots *une variable* par les mots *deux variables,* ou *trois variables;* car l'ensemble des fonctions continues (ou analytiques) de deux ou trois variables a même puissance que l'ensemble des fonctions continues (ou analytiques) d'une variable. La notion de puissance ne suffit donc pas pour justifier la manière de parler qui nous occupe; nous allons en rechercher l'origine pour tâcher de mieux en comprendre le sens. Cette origine est évidemment dans les théorèmes d'existence des intégrales des équations aux dérivées partielles. Bornons-nous, pour plus de netteté, au cas des fonctions analytiques, dans lequel ces théorèmes d'existence ont été mieux étudiés; des remarques analogues s'appliqueraient, *mutatis mutandis,* si l'on considérait des fonctions de variables réelles satisfaisant, ainsi que leurs dérivées, à des conditions de continuité convenables.

Étant donnée une équation aux dérivées partielles, par exemple la suivante

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \mathrm{F}\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right),$$

comment a-t-on été amené à dire que l'intégrale générale de cette équa-

(¹) DARBOUX, *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes,* t. I, p. 3.

(²) On doit aussi supposer vérifiées certaines conditions de continuité relativement à leurs dérivées. Mais nous n'avons pas à entrer ici dans ces détails.

tion dépend de *deux* fonctions arbitraires d'*une* variable? Supposons, pour plus de netteté, que la fonction F soit une fonction analytique *entière* des variables dont elle dépend et donnons-nous pour $x = 0$ les développements en série de z et de $\frac{\partial z}{\partial x}$ suivant les puissances de y.

$$(2)\qquad \left\{ \begin{aligned} z &= A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + \ldots, \\ \frac{\partial z}{\partial x} &= B_0 + B_1 y + B_2 y^2 + \ldots. \end{aligned} \right.$$

L'équation aux dérivées partielles (1) permettra alors de calculer toutes les dérivées partielles de z pour $x = 0$, $y = 0$ et, si l'on pose

$$\frac{1}{\alpha!\,\beta!}\left(\frac{\partial^{\alpha+\beta} z}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}\right)_{x=y=0} = C_{\alpha,\beta},$$

on pourra écrire

$$(3)\qquad z = \Sigma\Sigma\, C_{\alpha,\beta}\, x^\alpha y^\beta.$$

Les coefficients $C_{\alpha,\beta}$ sont des fonctions des A et des B, et d'ailleurs, quels que soient les A et les B, le développement (3) satisfait formellement à l'équation (1); mais, d'après le théorème de Cauchy, il est convergent dans le cas et dans le cas seulement où les développements (2) le sont.

Il est clair que chaque système de séries (2) détermine une seule série (3) et réciproquement chaque série (3) détermine d'une manière unique [1] le système des séries (2). Donc, l'ensemble des séries (3) a même puissance que l'ensemble des séries (2), c'est-à-dire la puissance du continu; mais il est clair que l'on peut ranger les coefficients A et B de manière qu'ils soient les coefficients d'une série unique, à une ou à plusieurs variables. Si donc ils sont regardés comme des nombres tout à fait arbitraires, il n'y a aucune raison pour rattacher l'ensemble des séries (3) à l'ensemble des séries (2), plutôt qu'à l'ensemble des séries

$$\Sigma\Sigma\, M_{r,s}\, x^r y^s,$$

par exemple. Mais le théorème de Cauchy nous apprend, et c'est là le point essentiel, que, parmi les développements (3), *on obtient tous ceux qui sont convergents en choisissant les* A *et les* B *de manière que les développements* (2) *soient eux-mêmes convergents.* Nous arrivons donc au résultat suivant : *Les conditions de convergence du développement formel de l'intégrale générale* (développement formel qui renferme, quelle que soit la nature de l'équation aux dérivées partielles considérée, une infinité dénombrable de constantes arbitraires) *sont identiques aux conditions de convergence des développements en série d'un nombre*

---

[1] Il suffit, en effet, de faire $x = 0$ dans la série (3) et dans sa dérivée par rapport à x pour avoir les séries (2).

déterminé de fonctions analytiques à un nombre déterminé d'arguments.

Tel est le sens précis que l'on doit attribuer à l'expression : *dépendre de p fonctions arbitraires de n variables.* Il y aurait lieu de reprendre, à ce point de vue, l'étude des diverses questions dans lesquelles cette expression s'introduit, de manière à se rendre compte de la légitimité de son emploi.

Dans certains cas, dont plusieurs sont bien connus, il n'y a aucun inconvénient à substituer *une seule* fonction arbitraire d'une variable à *plusieurs* fonctions arbitraires d'une variable (¹) : mais la question n'a pas été étudiée en général; nous nous contentons de la signaler.

(¹) Parmi les procédés que l'on peut employer, en voici un qui est très général, dans le cas des fonctions de variables réelles : il suffit de partager le domaine dans lequel la fonction donnée est définie, en plusieurs autres (qui peuvent être en infinité dénombrable); on a ainsi autant de fonctions que de domaines et d'ailleurs, par une transformation simple, on peut étendre le domaine dans lequel chacune d'elles est définie.

Pour les fonctions de variable complexe développées en série de Taylor on peut écrire $f(x) = \varphi(x^2) + x\psi(x^2)$ et faire correspondre à $f(x)$ les fonctions $\varphi(y)$ et $\psi(y)$. Ces divers procédés peuvent d'ailleurs être variés à l'infini.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

NOTES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

25376 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

ERRATA.

Page 35, ligne 13, *au lieu de* unité, *lire* unique.
Page 84, ligne 29, *au lieu de* l'ensemble E, *lire* l'ensemble $\mathcal{E}$.
Page 84, ligne 33, *au lieu de* coïncide avec E, *lire* coïncide avec $\mathcal{E}$.

25376 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

